

1. Вероятностные модели и парадокс Бертрانا.
2. Математическая модель центра случайной величины.
3. Математическая модель разброса случайной величины.
4. Случайные величины. Зависимость событий и случайных величин.
5. Виды сходимости случайных величин. Центральная предельная теорема, оценка скорости сходимости в ЦПТ.
6. Закон больших чисел, оценка скорости сходимости в ЗБЧ.
7. Распределение Пуассона, теорема Пуассона и ее обобщение.
8. Устойчивые и безгранично делимые распределения. Теоремы Леви и Хинчина.
9. Информация и энтропия. Свойства.
10. Дифференциальная энтропия, свойства некоторых распределений.
11. Определение пуассоновского процесса.
12. Информационные свойства пуассоновского процесса.
13. Случайные суммы, основные свойства, пуассоновские случайные суммы.
14. Геометрические случайные суммы, теорема Реньи, связь между геометрическими и пуассоновскими случайными суммами.
15. Теорема переноса. Аналог теоремы Пуассона для случайных сумм.
16. Смеси вероятностных распределений, идентифицируемость, примеры.
17. Обобщения пуассоновского процесса, дважды стохастический пуассоновский процесс.
18. Обобщенный процесс Кокса. ЦПТ и ЗБЧ для обобщенных процессов Кокса.
19. Острровершинность масштабных смесей нормальных законов.
20. Устойчивость нормальных смесей относительно смешивающего распределения: прямая задача.
21. Устойчивость нормальных смесей относительно смешивающего распределения: обратная задача.
22. Моделирование распределений приращений финансовых индексов смесями нормальных законов.

ЛИТЕРАТУРА

1. В.Ю. Королев. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Изд-во Проспект. 2006.
2. В. Феллер. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М.: Мир. 1984.
3. В.Ю. Королев, В.Е. Бенинг, С.Я. Шоргин. Математические основы теории риска. М.: Физматлит. 2007.
4. В.Ю. Королев. Вероятностно-статистический анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей. Декомпозиция волатильности финансовых индексов и турбулентной плазмы. М.: ИПИ РАН. 2007.

Вероятностные модели.

Шестаков Олег Владимирович

зачет

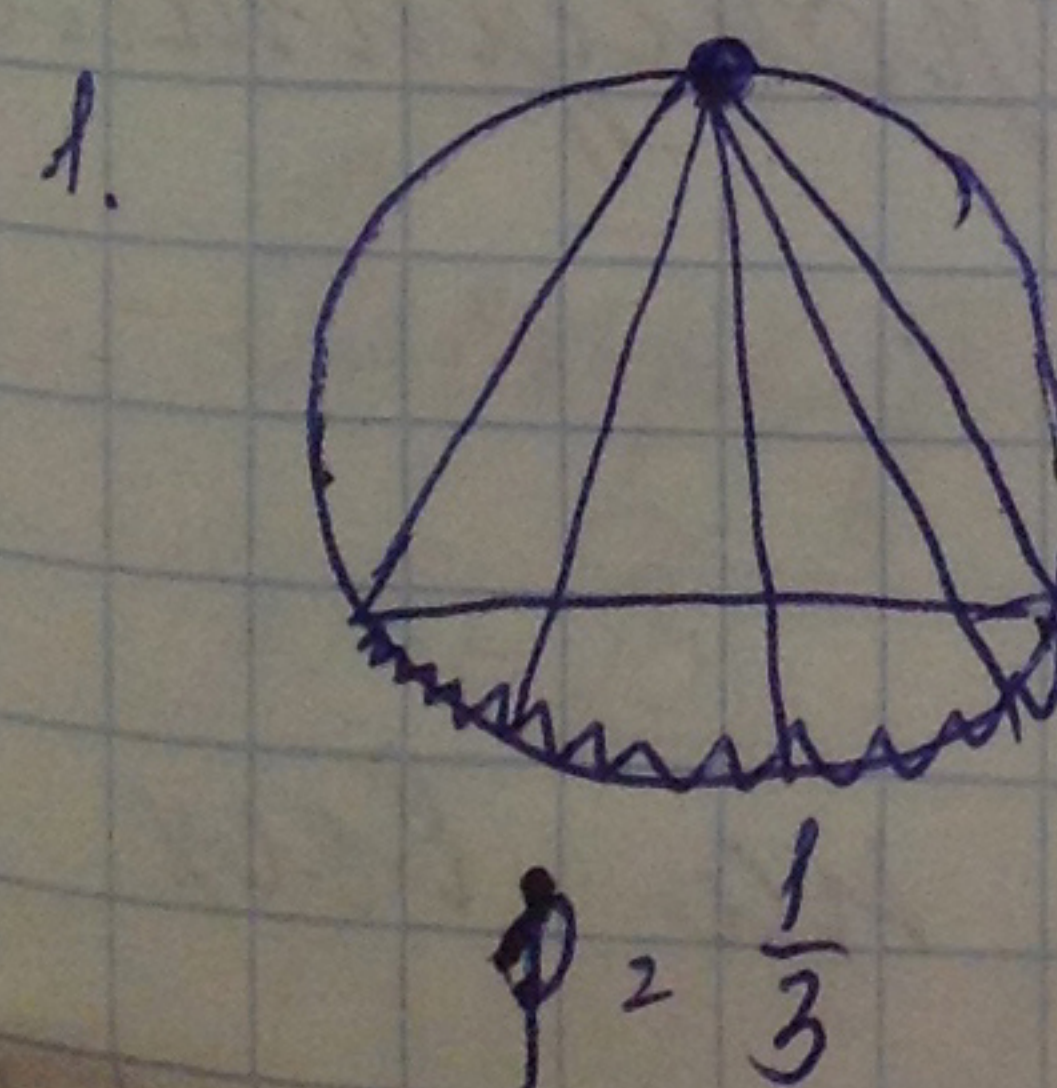
1. В.Ю. Королев. Матр. Вер. и мат. стат 2006
2. В. Феллер. Введение в тв и ее приложения 1984
3. В.Ю. Королев, С.Я. Шоргин, В.Б. Бенинг. Мат. основы теории риска 2004
4. В.Ю. Королев. Вероятностно-стат. анализ хаотических процессов с помощью смешанных гауссовских моделей ~ 2004

Лекция

Пр. Вероятностная модель – матем. модель реального явления содержащего элемент случайности (принципиально неустранимая неопределенность)

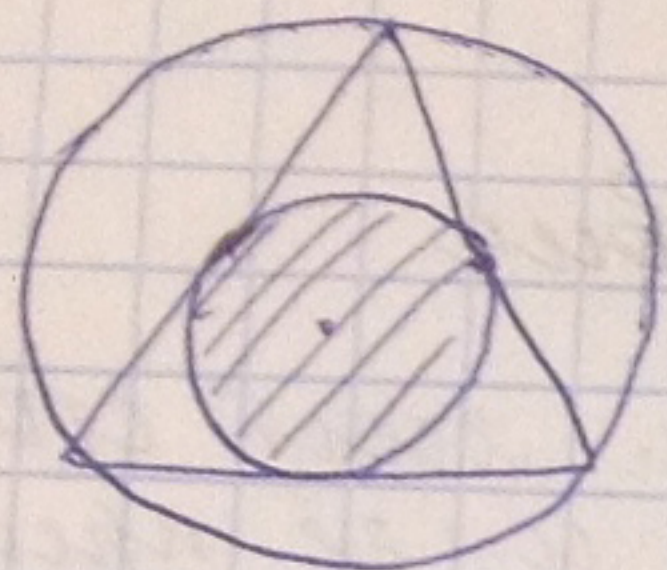
- 1) Наличие случайности (либо внешне даваемой либо откуда-то arising)
- 2) Воспроизводимость (мог считаем, что этот же эксперимент мог повториться в одних и тех же условиях (макроусловиях) много раз)
- 3) $\frac{n(A)}{n} \rightarrow p$ постоянство частот

Парадокс Бертрана: с какой вероятностью наугад выбранная точка круга окажется в стороне вышесей в него равноудален от окружности?



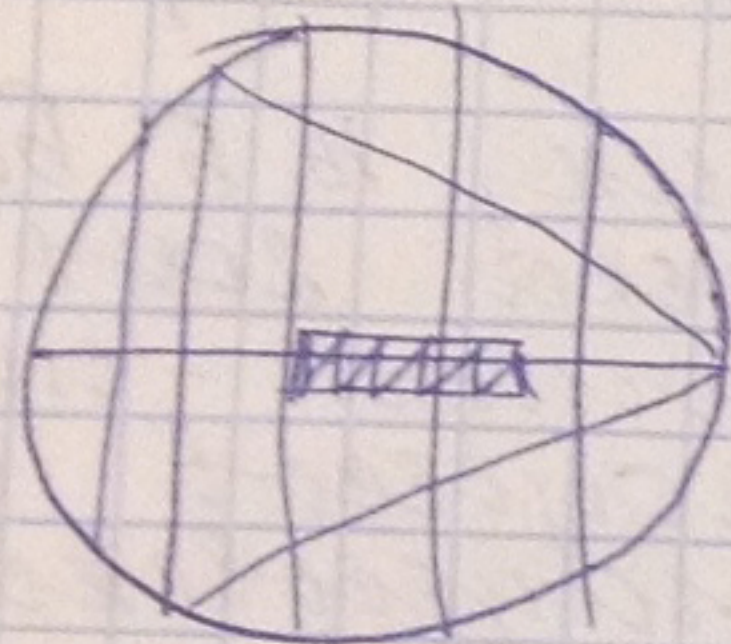
2 точка равномерно разбр. по кругу

2.



$p = \frac{1}{4}$ середина периферии равно-
мерно распр.

3.



$p = \frac{1}{2}$

Вероятностное пространство:

$(\Omega, \mathcal{A}, P)$

Ω - пр-во элементарных исходов (не пустое)

$\mathcal{A}$ - σ -алгебра подмножеств:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$

2) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A}$

3) $A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$

P - вероятностная мера, $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$

1) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$

2) $P(\Omega) = 1$

3) $A_1, \dots, A_i \cdot A_j = \emptyset \quad P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

$[a, b]$

$\mu([a, b]) = b - a$ - мера

$\tilde{\mathcal{B}}$ - борелевская σ -алгебра, порожденная всеми полуинтервалами $[a, b]$

теор. (о продолжении меры)

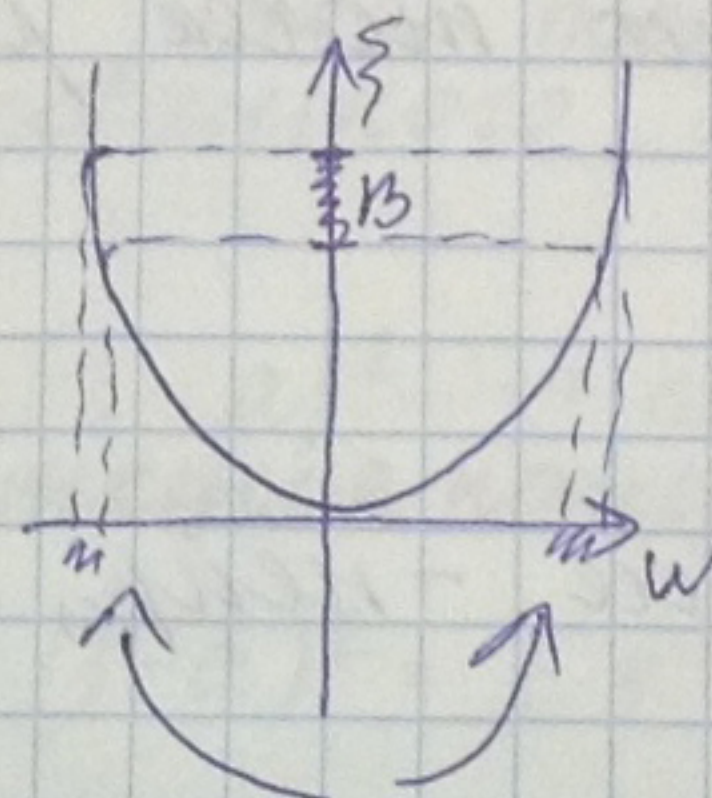
$\exists!$ μ^* на $\tilde{\mathcal{B}}$ такая что на $[a, b]$

отрезках от a до b : $\mu^*([a, b]) = \mu([a, b]) \quad \forall [a, b]$

ξ - случайная величина: $\Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$\forall B \in \tilde{\mathcal{B}}$ - где $\tilde{\mathcal{B}}$ борелевского мн-ва $\{\xi \in B\} = \{\omega: \xi(\omega) \in B\}$ и это мн-во должно быть измеримым:

$$\xi^{-1}(B) = \{\omega: \xi(\omega) \in B\} \in \mathcal{A}$$



объединение этих отрезков есть полный прообраз мн-ва B .

$\Omega = [0, 1] \quad \mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega\}$

$\xi(\omega) = \omega$

Такая φ -е не будет измеримой, т.к. $B = \{\frac{1}{2}\}$

$\xi(\omega) = \omega \quad \xi^{-1}(B) \not\rightarrow \Omega \in \mathcal{A}$

$\xi^{-1}(B) = \{\frac{1}{2}\} \notin \mathcal{A}$

$\{\frac{1}{2}\} \notin \mathcal{A} \Rightarrow$ измеримая φ -е

Распределение случайной величины:

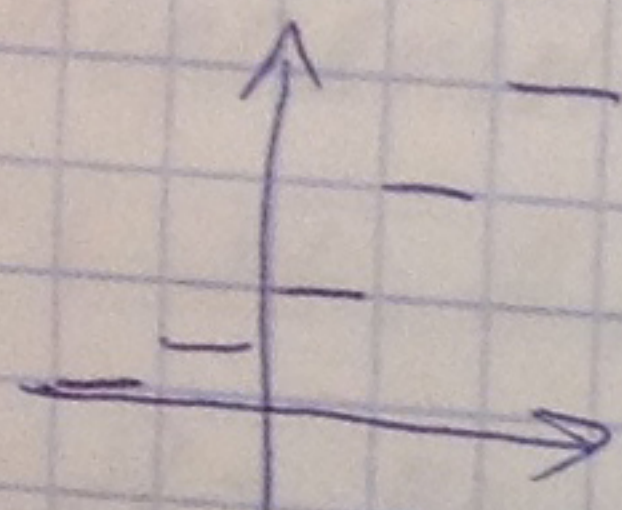
$\forall B \in \tilde{\mathcal{B}} \quad P(\xi \in B)$ - вероят. случ. величины

$F_{\xi}(x) = P(\xi \leq x) = P(\xi \in (-\infty, x])$ - ф-е распр. случ. в.

- 1) $0 \leq F_{\xi}(x) \leq 1$
- 2) $F_{\xi}(x)$ неубывающая
- 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_{\xi}(x) = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_{\xi}(x) = 0$
- 4) кнр. слева

а) абсолютно кнр. распределение
 $f_{\xi}(x) \geq 0$ почти всюду
 $F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x f_{\xi}(t) dt$

б) дискретное распределение: имеет не более чем счетное число точек роста



в) непрерывное распределение - кнр. слева
 в каждой точке роста $F_{\xi}(x)$ - кнр.

Математические модели "центра"

1) мат. ожидание а) $E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} xf_{\xi}(x) dx$

б) $E\xi = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \cdot p(\xi = x_i)$

мат. ожид. не всегда $\exists$ - может отсутствовать
 мат. ожид. единственно
 мат. ожид. не всегда $\exists$ - может отсутствовать

2) медиана

квантили кнр. $F_{\xi}(x)$ норма $q \in (0,1)$
 это такая точка x_q

$P(\xi < x_q) \leq q, P(\xi \leq x_q) \geq q, F_{\xi}(x_q) = q$

две запоминки: $F(x_q-) \leq q$
 $F(x_q+) \geq q$
 $x_{q/2}$ - медиана - всегда $\exists$, но не!

3) мода - наибольшее значение функции плотности

$\xi: x_1, x_2, \dots$ б) $\text{mod } \xi = x_k: P(\xi = x_k) \geq P(\xi = x_i) \forall i$
 Единственность моды не гарантируется

а) $\text{mod } \xi: f(\text{mod } \xi) \geq f(x) \forall x$
 т.е. точка где f принимает модальный максимум

$E(\xi - a)^2 \rightarrow \min (a = ?)$

Функция потерь

$E(\xi - a)^2 = E\xi^2 - 2E\xi a + a^2$

$a_{\min} = E\xi$ - генерация с.в.

$E|\xi - a| \rightarrow \min$

$|\xi - a| - |\xi - \text{mod } \xi| = \begin{cases} \text{mod } \xi - a, & \xi \geq a \\ a - \text{mod } \xi, & \xi \leq \text{mod } \xi \\ \text{mod } \xi + a - 2\xi, & \text{mod } \xi < \xi < a \end{cases}$

$\text{mod } \xi + a - 2\xi \geq \text{mod } \xi - a \quad (\xi \in (\text{mod } \xi, a))$

$E|\xi - a| - E|\xi - \text{mod } \xi| = E(|\xi - a| - |\xi - \text{mod } \xi|) \geq$

$\geq (\text{mod } \xi - a) E I(\xi \geq a) + (a - \text{mod } \xi) E I(\xi \leq \text{mod } \xi) +$

$+ (\text{mod } \xi + a - 2\xi) E I(\text{mod } \xi < \xi < a) =$

$= (\text{mod } \xi - a) \cdot P(\xi \geq \text{mod } \xi) + (a - \text{mod } \xi) P(\xi \leq \text{mod } \xi) +$

$= (a - \text{mod } \xi) (P(\xi \leq \text{mod } \xi) - P(\xi > \text{mod } \xi))$

$\forall \xi, a \geq \text{mod}$

$\forall$ всегда определена медиана

$$\Rightarrow \text{med } \xi = \arg \min_a E|\xi - a|$$

$$P(\xi > x) = e^{-x} \quad x \geq 0$$

средний доход: $E\xi = 1$ - большая за счёт масштабов
 все пороги
 реальность $\Rightarrow \text{med } \xi$ - корень ур. $e - 1 - e^{-x} = \frac{1}{2}$
 $\text{med } \xi = \ln 2 \approx 0,7$

все много $\text{mod } \xi = 0$

лучшая модель центра:
 мат. ожидания - если нет выбросов

медиана - если есть выбросы

Математические модели разброса значений случ. величины "центра":

$$1. D\xi = E(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2 - \text{дисперсия}$$

$$a) D(c\xi) = c^2 D\xi$$

$$b) D\xi \geq 0 \quad \text{почти всегда}$$

$$b) D\xi = 0 \Leftrightarrow \xi = c$$

$D\xi$ среднее квадратичное отклонение $= \sqrt{D\xi}$
 если ξ не всегда!
 но всегда ξ

$$2. E|\xi - \text{med } \xi| \quad 3. E|\xi - E\xi| - \text{интер-нальная метрика}$$

$$4. \text{med } |\xi - \text{med } \xi| - \text{M.A.D.} - \text{медиана абсолютного отклонения от медианы}$$

одна из наиболее устойчивых мер разброса

$$5. I.Q.R. - \text{интерквартильный размах}$$

$X_{3/4}$ - квартиль порядка $3/4$

$X_{1/4}$ - квартиль порядка $1/4$

$$I.Q.R. = X_{3/4} - X_{1/4}$$

аналог медианы моделей "центра"

$$|E\xi - \text{med } \xi| \leq E|\xi - \text{med } \xi| \quad (\text{нер-во Йенсена}) \leq E|\xi - E\xi| \leq (\text{нер-во Чебышева}) \leq \sqrt{E(\xi - E\xi)^2} = \sqrt{D\xi}$$

Опр. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $A, B \in \mathcal{A}$ - независимые,
 если $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$

Пример. а) 52 карты: по 13 штук 4 мастей

$$P(\text{туз пик}) = \frac{1}{52}$$

$$P(\text{туз}) = 4/52 \quad P(\text{пик}) = 1/4$$

$$P(\text{туз пик}) = P(\text{туз}) \cdot P(\text{пик}) = \frac{1}{52}$$

$\Rightarrow$ события независимы с точки зрения теор. вероят.

б) 53 карты: по 13 штук 4 мастей + 1 джокер

$$P(\text{туз пик}) = \frac{1}{53}$$

$$P(\text{туз}) = 4/53 \quad P(\text{пик}) = 13/53$$

$$P(\text{туз пик}) \neq P(\text{туз}) \cdot P(\text{пик})$$

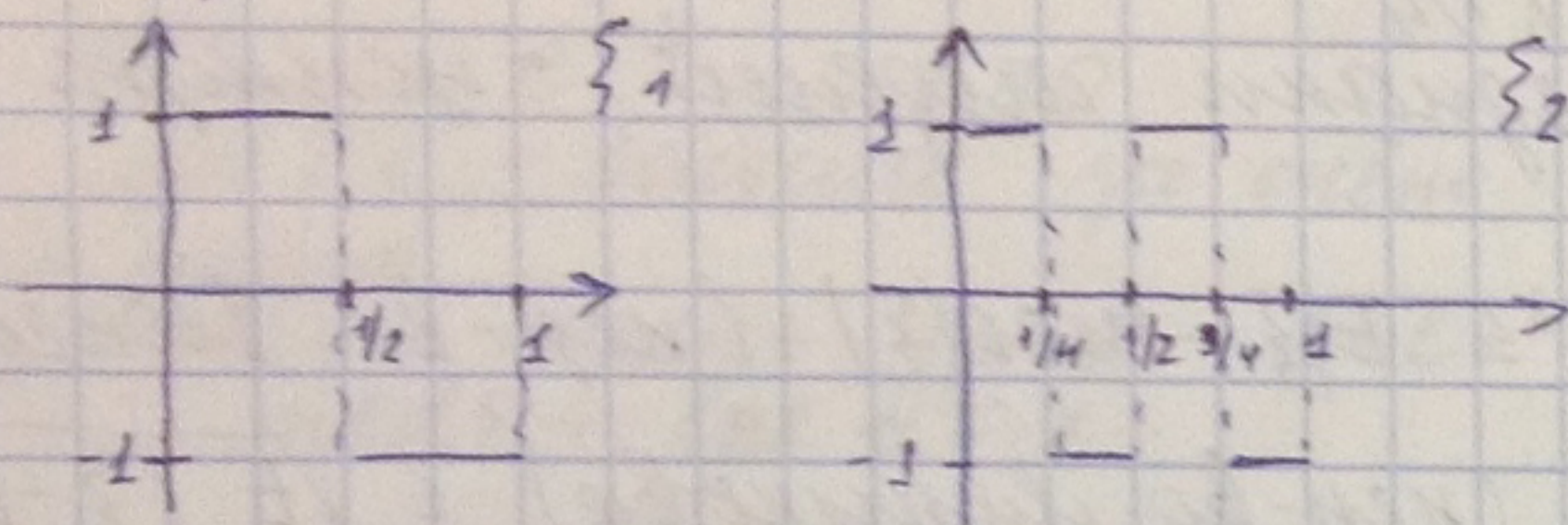
$\Rightarrow$ не независимы

Опр. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ - n/z (в совокуп.)
 если $\forall n \geq k \geq 2 \quad i_1 < i_2 < \dots < i_k$

$$P(A_{i_1} \cdot \dots \cdot A_{i_k}) = P(A_{i_1}) \cdot \dots \cdot P(A_{i_k})$$

Опр. ξ, η - случ. величины. Они наз-ся независимыми, если $\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}$
 $P(\xi \in B_1, \eta \in B_2) = P(\xi \in B_1) \cdot P(\eta \in B_2)$

Пример. $\Omega = [0, 1]$, $\mathcal{A}$ - σ -алгебра борелевских подмножеств, P - мера Лебега.



$$P(\xi_1 = 1, \xi_2 = 1) = \frac{1}{4}$$

$$P(\xi_1 = 1) = P(\xi_2 = 1) = \frac{1}{2} \quad P(\xi_1 = 1) \cdot P(\xi_2 = 1) = \frac{1}{4} \Rightarrow \text{н/з}$$

$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 2$ - в то же время есть функциональная зависимость

Пример. $\xi \sim R[0, 2\pi]$

$\xi_1 = \cos \xi$ $\xi_2 = \sin \xi$ $\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$
доказать, что ξ_1 и ξ_2 зависимы

$$\text{cov}(\xi, \eta) = E[(\xi - E\xi)(\eta - E\eta)] = E\xi\eta - E\xi E\eta$$

1) cov линейна по своим аргументам

2) инвариантна относительно сдвига на const

качественная характеристика зависимости (не показывает не только, только как)

$$\text{corr}(\xi, \eta) = \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$$

1) если две случайные величины независимы, то $\text{corr} = 0$.

$$2) |\text{corr}(\xi, \eta)| \leq 1$$

$$E(x\xi + y\eta)^2 \geq 0$$

$$E(x\xi + y\eta)^2 = E(x^2\xi^2 + 2x\xi y\eta + y^2\eta^2)$$

$$D \leq 0 \Rightarrow E(\xi\eta)^2 \leq D\xi \cdot D\eta$$

$$3) |\text{corr}(\xi, \eta)| = 0 \Rightarrow \xi, \eta - \text{некоррелированы}$$

если ξ, η н/з $\Rightarrow \text{corr}(\xi, \eta) = 0$
обратное неверно! пример с $\sin$ и $\cos$

$$4) |\text{corr}(\xi, \eta)| = 1 \Leftrightarrow \exists a, b: \eta = a\xi + b$$

Виды сходимости случайных величин: Закрепить

1) сходимость почти всюду (почти наверное, с вер. 1)

$\xi_1, \xi_2, \dots$ - случайные величины, определенные на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ с.к. н.в. ξ :

$$P(\omega: \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega) = \xi(\omega)) = 1 \quad \xi_n \xrightarrow{\text{н.в.}} \xi$$

2) сходимость по вероятности

$\xi_1, \xi_2, \dots$ - случайные величины, определенные на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ с.к. по вер.

$$\xi_n \xrightarrow{P} \xi: \forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} P(\omega: |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon) = 0$$

3) сходимость в среднем порядке $r > 0$

$\xi_1, \xi_2, \dots$ - случайные величины, определенные на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ с.к. в среднем

$$\xi_n \xrightarrow{r} \xi: \lim_{n \rightarrow \infty} E|\xi_n - \xi|^r = 0$$

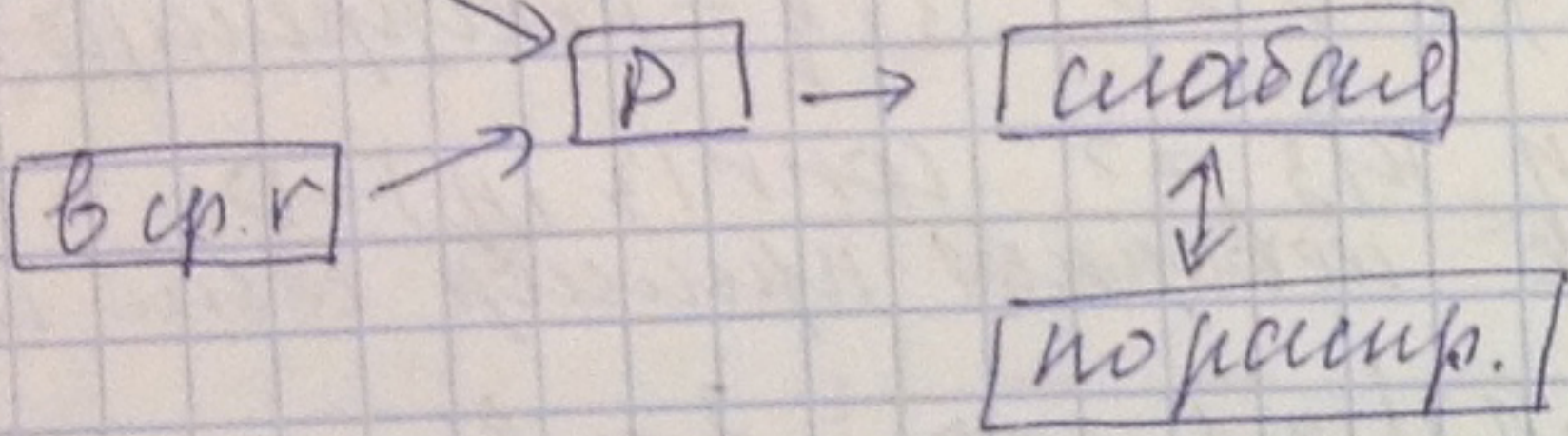
4) слабая сходимость $\xi_1, \xi_2, \dots$ - случайные величины, $\forall \varphi$ - непрерывная и ограниченная функция

$$E\varphi(\xi_n) \rightarrow E\varphi(\xi) \quad \xi_n \xrightarrow{w} \xi \quad \int \varphi(x) dF_n(x) \rightarrow \int \varphi(x) dF(x)$$

5) сходимость по распределению

$$F_n - \text{функции распределения } \xi_n \quad F_n(x) \rightarrow F(x) \quad \forall x, \text{ непрерывности } F(x)$$

п. в.



теор. (ЗБЧ Колмогорова):
 $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н. о. р. с. в. (незав. одинаково распределенные)
 $E\xi_i = a < \infty$ $\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i}{n} \xrightarrow{м.в.} a$

теор. (ЦПТ)
 $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н. о. р. с. в. $E\xi_i = a$ $D\xi_i = \sigma^2 < \infty$
 $P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) \rightarrow \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du$
 $Z_n = \left| \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} \right|$
 $r(n) = \frac{Z_n}{r(n)}$ $r(n) = \frac{1}{\sqrt{n}}$

$x > 0$: $P(\sqrt{n} \cdot Z_n < x) = P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}}\right| < \frac{x}{\sigma}\right) =$
 $= P\left(-\frac{x}{\sigma} < \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < \frac{x}{\sigma}\right) \rightarrow \Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{x}{\sigma}\right) =$
 $= 2\Phi\left(\frac{x}{\sigma}\right) - 1$

Неравенство Берри-Эсseenа:

$\mu_3 = E|\xi_i - a|^3 < \infty$
 $\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - na}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C_0 \mu_3}{\sigma^3 \sqrt{n}}$

$0,4 < C_0 < 0,5$

Правило 3 сигм.

$X \sim N(a, \sigma^2)$ $P(|X - a| < 3\sigma) \approx 0,994$

в общем случае $P(|X - a| < 3\sigma) \geq 0,889$
 следует из пер-во Чебышева $P(|X - EX| > \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}$

$\xi_1, \xi_2, \dots$ — н. о. р. с. в. $a_i = E\xi_i$, $\sigma_i^2 = D\xi_i$, $F_i(x)$ — ф. р. ξ_i
 $A_n = \sum_{i=1}^n a_i$ $B_n^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$ $F_n(x) = P\left(\frac{\sum_{i=1}^n \xi_i - A_n}{B_n} < x\right)$

$\forall \varepsilon > 0$ $\frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x - a_i| > \varepsilon B_n} |x - a_i|^2 dF_i(x) \rightarrow 0$ — условие (*) Лундберга

$\frac{\sigma_i^2}{B_n^2} < \varepsilon$

$\sigma_i^2 = \int |x - a_i|^2 dF_i(x) = \int_{|x - a_i| \leq \varepsilon B_n} |x - a_i|^2 dF_i(x) + \int_{|x - a_i| > \varepsilon B_n} |x - a_i|^2 dF_i(x) \leq$

$\leq \int_{|x - a_i| \leq \varepsilon B_n} \varepsilon^2 B_n^2 dF_i(x) + \int_{|x - a_i| > \varepsilon B_n} |x - a_i|^2 dF_i(x) \leq$

$\leq \int \varepsilon^2 B_n^2 dF_i(x) + \int_{|x - a_i| > \varepsilon B_n} |x - a_i|^2 dF_i(x) \leq \varepsilon^2 B_n^2 +$

$+ \sum_{i=1}^n \int_{|x - a_i| > \varepsilon B_n} |x - a_i|^2 dF_i(x)$

$\Rightarrow \frac{\sigma_i^2}{B_n^2} \leq \varepsilon^2 + \frac{1}{B_n^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x - a_i| > \varepsilon B_n} |x - a_i|^2 dF_i(x) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

$\left(\begin{array}{l} \text{вообще } \varepsilon > 0 \\ \varepsilon^2 < \varepsilon/2 \end{array} \right)$ $\left(< \frac{\varepsilon}{2} \text{ вообще } n \right)$

теор. (Лундберга - Феллера):
 $\xi_1, \xi_2, \dots$ — н. о. р. с. в. $a_i = E\xi_i$, $\sigma_i^2 = D\xi_i$,

$F_i(x) - \Phi(x)$ и выполнено условие
Линдберга (*)

$\Rightarrow F_n(x) \Rightarrow \Phi(x)$ и выполнено условие
равномерной предельной теоремы (**)

Отсюда $P(|\xi_i - a_i| > \varepsilon m) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (**)$
 $i=1, \dots, n$

Обратно: если есть сходимость к норм. закону и выполнено (***) $\Rightarrow$ выполнено (*)

$$P(|\xi_i - a_i| > \varepsilon m) \cdot \varepsilon^2 m^2 = \int \varepsilon^2 m^2 dF_i(x) \leq \int_{|x - a_i| > \varepsilon m} |x - a_i|^2 dF_i(x) \leq \sum_{i=1}^n \int_{|x - a_i| > \varepsilon m} |x - a_i|^2 dF_i(x)$$

$$\Rightarrow \sup_{1 \leq i \leq n} P(|\xi_i - a_i| > \varepsilon m) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 m^2} \sum_{i=1}^n \int_{|x - a_i| > \varepsilon m} |x - a_i|^2 dF_i(x)$$

$n \rightarrow \infty$ получим требуемое.

$$\mu_i^3 = E|\xi_i - a_i|^3 \quad M_n^3 = \sum_{i=1}^n \mu_i^3$$

$$\frac{M_n^3}{m^3} \rightarrow 0 \Rightarrow F_n(x) \Rightarrow \Phi(x)$$

$$\int_{|x - a_i| > \varepsilon m} |x - a_i|^2 dF_i(x) = \int_{|x - a_i| > \varepsilon m} |x - a_i|^2 \frac{\varepsilon m}{\varepsilon m} dF_i(x) \leq \frac{1}{\varepsilon m} \int_{|x - a_i| > \varepsilon m} |x - a_i|^3 dF_i(x) \leq \frac{1}{\varepsilon m} \int_{|x - a_i| > \varepsilon m} |x - a_i|^3 dF_i(x)$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon m} \int_{|x - a_i| > \varepsilon m} |x - a_i|^3 dF_i(x) \leq \frac{1}{\varepsilon m} \int_{|x - a_i| > \varepsilon m} |x - a_i|^3 dF_i(x)$$

$X_1, \dots, X_n$ - н.о.р.с.в. $EX_i = a$

4 лекция

$$P(|\bar{X} - a| < \varepsilon) = p \quad P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - a| < \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sigma}\right) = p$$

$$P\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma} |\bar{X} - a| < \frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sigma}\right) \approx \Phi\left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 = p \quad (*)$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{1+p}{2}}, \text{ где } u_{\frac{1+p}{2}} - \text{квантили стандартного норм. распределения (закон)} N(0,1)$$

в силу леммы Берри-Эсена:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - \Phi(x)| < \frac{C_0 \mu^3}{\sqrt{n} \sigma^3} = L_{n,3}$$

$$(*) \geq 2\Phi\left(\frac{\varepsilon \sqrt{n}}{\sigma}\right) - 1 - 2L_{n,3} \Rightarrow \varepsilon = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\frac{1+p}{2}} + L_{n,3}$$

если $\frac{1+p}{2} + L_{n,3} \geq 1$, то точности не будет хорошей

$$L_{n,3} \geq \frac{0,4}{\sqrt{n}}, \text{ если } n \geq \frac{0,64}{(1-p)^2} \Rightarrow \text{точности интервала нет}$$

теор. (Пуассона)

$X_1, \dots, X_n$ - н.о.р.с.в.

$$X_i \sim \begin{cases} 1, & p \\ 0, & q=1-p \end{cases}$$

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

$$DS_n = npq \quad ES_n = np$$

если дисперсия велика (при q далека от 0 и 1) $\Rightarrow$ применима ЦСР.

Иначе её не можно применить (будет очень большая погрешность)

$$np = 1$$

теор. $X_1, \dots, X_n$ - н.о.р.с.в., $X_i \sim \begin{cases} 1, & p \\ 0, & q=1-p \end{cases}$

$$p \leq \frac{1}{4}, \quad k-1 \leq \frac{n}{4} \quad \lambda = np$$

$$P(S_n = k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda + V_n(k)}$$

$$\frac{\lambda k}{n} + 2 \log\left(\frac{4}{3}\right) \cdot \frac{k(1-k)}{n} - \frac{2\lambda^2}{3n} \leq V_n(k) \leq \frac{\lambda k}{n} + \frac{1}{n}$$

Докажем правую часть (левая аналогично, только используем первую теорему)

$$P(S_n = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \cdot p^k (1-p)^{n-k}$$

$$\cdot p^k (1-p)^{n-k} = \left(\frac{np}{k!}\right)^k \cdot e^{-np} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$$\cdot (1-p)^{n-k} \cdot e^{np} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda + V_n(k)}$$

$$V_n(k) = \log \left[\left(1 - \frac{1}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) e^{np} \frac{\lambda^k}{k!} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} \log\left(1 - \frac{i}{n}\right) + (n-k) \log(1-p) + np \leq$$

$$\leq - \sum_{i=1}^{k-1} \frac{i}{n} - np + kp + np = \frac{(1-k)k}{2n} + \frac{k \cdot \lambda}{n}$$

пер. во
для логарифма

Схема серий

$X_{1,1}$
 $X_{2,1} \dots X_{2,2}$
 $\dots$
 $X_{n,1} \dots X_{n,n}$

$X_{i,j}$ к/з в каждой серии и одинаково распределены но при распределении перекрест от 3 серии к другой распределение может меняться.

$$\sum \frac{X_i - a_i}{\sigma \sqrt{n}} = \sum_{i=1}^n \frac{Y_{n,i}}{\sigma \sqrt{n}} \quad Y_{n,i} = \frac{X_i - a_i}{\sigma \sqrt{n}}$$

теор (Пуассона)

$X_{1,1}$
 $X_{n,1} \dots X_{n,n}$

$X_{1,1} \dots X_{1,n} \dots X_{n,1} \dots X_{n,n}$ - к/з для $\forall i$

$$X_{i,j} \sim \begin{cases} 1 & p_i \\ 0 & 1-p_i \end{cases}$$

$$\sum p_i \rightarrow \lambda > 0$$

$$\forall \epsilon = 0, 1, \dots \quad \lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$(S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n})$$

опр. Функция $G(x)$ и соответствующая ей характеристическая ф-я $g(t)$. Пусть $g(t)$ непрерывна, т.е. $\forall a_1 > 0, a_2 > 0$ $\exists \delta > 0$ и $\forall \epsilon > 0$ таковы, что $g(a_1 t) \cdot g(a_2 t) = e^{i a_1 t} \cdot g(a_2 t) \Rightarrow \forall a_1, a_2 > 0, b_1, b_2 \in \mathbb{R} \exists \delta > 0, \forall \epsilon > 0$ таковы, что

$$G_1 \otimes G_2(x) = G_3(x), \text{ где } G_1 = G(a_1 x + b_1), G_2 = G(a_2 x + b_2), G_3 = G(ax + b)$$

$$g(t) - \text{устойчива} \Leftrightarrow g(t) = \exp(i a t - c |t|^d) (1 + i b \frac{t}{|t|} Q(t, d))$$

$$\text{где } Q(t, d) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \pi^{d/2}, & \text{если } d=1 \\ \frac{1}{\pi} \log|t|, & \text{если } d=2 \end{cases}$$

$$d \in (0, 2]$$

Рассмотрим устойчивое распр. абсолютно непрерывное (т.е. плотность непрерывна)
 $d=2$ - нормальное распределение

Поло и устойчивых распр, у которых плотность имеет единственный вид

- 1) $d=2$ - норм. распр.
- 2) $d=1$ - распр. Коши
- 3) $d=1/2$ - распр. Леви
- 4) $d=1/2$ - распр. симметрическое к 3) $x > 0$ $x < 0$

теор (Левин) $\sum X_i$ - н.о.р.е.в. $\sum_{i=1}^n \frac{X_i - a_i}{b_n} \Rightarrow G(x)$

При некотором выборе $\{a_n\} \in \mathbb{R}$ и $\{b_n\} \in \mathbb{R}^+$ $G(x)$ - ф.р. может быть предельной для $S_n \Rightarrow G(x)$ (устойчива)

если $G_\alpha(x)$ - целой число с показателем $\alpha \in (0, 2)$:
 при $x > 0$ $x \rightarrow \infty$ $G_\alpha(-x) + 1 - G_\alpha(x) \sim \frac{C}{x^2}$

$X \sim G_\alpha(x) \Rightarrow E|X|^r < \infty$ при $0 \leq r \leq \alpha$,
 но $E|X|^r = \infty$ при $r > \alpha$
 $\Rightarrow$ все целой число законы (кроме норм.) не имеют дисперсии

Безгранично делимые распр.

Опр. Ф.р. $F(x)$ и соответствующая ей характеристическая ф-я $f(t)$ на-ея безгранично делимой, если для $\forall n \in \mathbb{N}$
 $\exists f_n(t)$ - нар. ф.: $f(t) = (f_n(t))^n$

К ним относятся целой числовые, Пуассона, гамма, бин. и др.

теор [Хинчина]

$X_{n,1}$ и $\limsup_{n \rightarrow \infty} P(|X_{n,j}| > \varepsilon) = 0$
 $X_{n,1} \dots X_{n,m_n}$ (условие равномерной предельной малости)

$$S_{n,m_n} = X_{n,1} + \dots + X_{n,m_n}$$

$F(x)$ может быть предельной для распр. $S_{n,m_n} \Leftrightarrow F(x)$ - безгран. делима

теор

$\{X_{n,j}\}$ - схема серий, $X_{n,j} \sim \begin{cases} 1, p_{n,j} \\ 0, 1-p_{n,j} \end{cases}$

$\max_{1 \leq j \leq n} p_{n,j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ (условие равномерной предельной малости)

$$\sum_{j=1}^n p_{n,j} \rightarrow \lambda > 0 \quad S_n = X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$$

тогда $\lim_{n \rightarrow \infty} P(S_n = k) = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \quad \forall k = 0, 1, \dots$

док-во: $\varphi_{n,j}(s) = ES^{X_{n,j}} = (1 - p_{n,j}) + sp_{n,j} = 1 + p_{n,j}(s-1)$

$$\log ES^n = \sum_{j=1}^n \log(1 + (s-1)p_{n,j}) \sim \sum_{j=1}^n (s-1)p_{n,j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda(s-1)$$

$$\sum_{j=1}^n p_{n,j}^2 \leq (\max_{1 \leq j \leq n} p_{n,j}) \sum_{j=1}^n p_{n,j} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$ES^n \rightarrow e^{\lambda(s-1)}$ - производящая ф-я Пуассоновского распр.

$\Rightarrow$ теорема док-на и $\Rightarrow$ теорема Пуассона как частный случай

Математические модели информации и неопределенности

5 лекции

Опр. Информации, содержащаяся в событии B относительно события A ($P(A) > 0, P(B) > 0$) на-ея величина $I(A/B)$

$$I(A/B) = \log_2 \frac{P(A/B)}{P(A)}$$

$a > 1$

Опр. Информации, содержащаяся в событии A ($P(A) > 0$) $I(A) = -\log_2 P(A)$

1. Если A и B независимы, то $I(A/B) = 0$
2. Если A и B независимы, то $I(A/B) = I(A) + I(B)$
3. Чем меньше вероятность события, тем больше информации оно несет.

$\alpha = 1 \Rightarrow$ информация кодируется в биты

$\alpha = 2 \Rightarrow$ 1 инф. содержится в событии, вер. которого $= 1/2 \Rightarrow$ информация кодируется в битах

$$E = \{A_1, \dots, A_n\} \quad p_i = P(A_i)$$

$Q(E)$ - энтр. величина: $I(A_1) \dots I(A_n)$
 $p_1 \dots p_n$

т.е. показывает сколько информации и с какой вероятностью мы получим от эксперимента

$H(E) = EQ(E)$ - среднее значение энтропии

$$H(E) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

Опр. $H(E) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$ наз-ся энтропией эксперимента E (мера неопределенности этого эксперимента)

теор. $H(E) = - \sum_{i=1}^n p_i \log p_i$ обладает следующими свойствами:

1) $H(E) \geq 0$, $H(E) = 0 \Leftrightarrow \exists j \in \{1, n\} : p_j = 1$,
 $p_i = 0 \text{ } i \neq j, i \in \{1, n\}$

(т.е. только в полном детермен. эксперименте)

2) $\exists E_0 = \{A_1, \dots, A_n\}, p_i = P(A_i) = \frac{1}{n}$

$\exists E_1$ - другой эксперимент с n исходами

$$E_1 = \{A'_1, \dots, A'_n\}$$

тогда $H(E_0) \geq H(E_1)$

3) $E = \{A_1, \dots, A_n\}$, E_1 - эксперимент, полученный из E добавлением каких-то 2 исходов A_i и A_j (т.е. там уже $n-1$ исходов); $A' = A_i \cup A_j$ $P(A') = P(A_i) + P(A_j)$

$$E_2 = \{A_i, A_j\} \text{ - только из 2 исходов}$$

$$\Rightarrow P(A_i) = \frac{p_i}{p_i + p_j} \quad P(A_j) = \frac{p_j}{p_i + p_j}$$

$$\text{тогда } H(E) = H(E_1) + (p_i + p_j) H(E_2)$$

4) $H(E)$ не зависит от самих исходов $\{A_1, \dots, A_n\}$, а зависит только от их вероятностей $(p_i \text{ } i = \overline{1, n})$, и является симметричной ф-ей p_i

5) $H(E)$ - выпуклая функция $p_1, \dots, p_n$.

Лемма: 4, 5 - очевидны (в 5, если $p_i \geq 0$, то $p_i \log p_i$ непрерывна по непрерывности)

1. $g(p) = -p \log p$ непрерывна при $p \geq 0$, $g(p) \geq 0$.
 $0 \leq p \leq 1$ $g(p) \geq 0$ и $g(p) = 0$ только, если $p = 0$ или $p = 1$

$$H(E) = \sum_{i=1}^n g(p_i)$$

$$H(E) \geq 0$$

$$\sum_{i=1}^n p_i = 1 \Rightarrow H(E) = 0 \Leftrightarrow \exists j: p_j = 1 \text{ } i \neq j \text{ } p_i = 0$$

2. $h(p) = p \log p$

(можно основание $\log$ поменять на 2)

$$h'(p) = p \cdot \frac{1}{p} + \log p = 1 + \log p$$

$$h''(p) = \frac{1}{p} > 0 \text{ на } (0, 1) \Rightarrow \text{ф-я выпуклая вниз}$$

$$\exists d_i \geq 0 \text{ } i = \overline{1, n} \quad \sum_{i=1}^n d_i = 1, \quad y_i \in R \text{ } i = \overline{1, n}$$

$$h\left(\sum_{i=1}^n d_i y_i\right) \leq \sum_{i=1}^n d_i h(y_i) \leftarrow \text{т.к. выпуклая вниз}$$

$$H(E_0) = -\log \frac{1}{n} = -\sum_{i=1}^n p_i \cdot \log \frac{1}{n} = \text{максимальная}$$

$$= -n \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{n} \log \frac{\sum_{i=1}^n p_i}{n} \geq -n \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{n} \log p_i =$$

$$d_i = \frac{1}{n} \quad y_i = p_i \quad = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

3. $H(E) \geq H(E_1)$:

$$H(E_1) = - \sum_{k=1}^n p_k \log p_k - (p_i + p_j) \log (p_i + p_j) =$$

$$= - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^n p_k \log p_k - p_i \log (p_i + p_j) - p_j \log (p_i + p_j) =$$

$$\leq - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i, j}}^n p_k \log p_k - p_i \log p_i - p_j \log p_j = H(E)$$

$$H(E) - H(E_1) = -p_i \log p_i - p_j \log p_j + (p_i + p_j) \cdot$$

$$\cdot \log (p_i + p_j) = (p_i + p_j) \left(-\frac{p_i}{p_i + p_j} \log p_i - \frac{p_j}{p_i + p_j} \log p_j + \right.$$

$$\left. + \frac{p_i}{p_i + p_j} \log (p_i + p_j) + \frac{p_j}{p_i + p_j} \log (p_i + p_j) \right) =$$

$$= (p_i + p_j) \left(-\frac{p_i}{p_i + p_j} \log \frac{p_i}{p_i + p_j} - \frac{p_j}{p_i + p_j} \log \frac{p_j}{p_i + p_j} \right) =$$

$$= (p_i + p_j) H(E_2).$$

теор. (Фадеева)

$$\exists p_i \geq 0 \quad i = \overline{1, n}, \quad \sum_{i=1}^n p_i = 1$$

$H(p_1, \dots, p_n)$ — Ф-ия от $p_1, \dots, p_n$ и обладающая свойствами непрерывности в предельном случае. Тогда $H(p_1, \dots, p_n) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$

ξ — случайная величина

$$x_1, \dots, x_n$$

$$p_1, \dots, p_n \quad H(\xi) = -\sum_{i=1}^n p_i \log p_i$$

$$p(\xi) = \begin{cases} p_i, & \xi = \xi_i \quad i = \overline{1, n} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases} \quad H(\xi) = -E \log p(\xi)$$

ξ — абс. непрерыв. $p(\xi)$ — плотность ξ

$$H(\xi) = -E \log p(\xi)$$

X — случайная величина

X_Δ — прямая случайная величина, приближающаяся к X при $\Delta \rightarrow 0$ $X_\Delta \xrightarrow{m.s.} X \quad (X_\Delta \Rightarrow X)$

$$\Delta_i \quad \Delta = |\Delta_i|$$

$$H(X_\Delta) = - \sum_{i=1}^n p(X \in \Delta_i) \log p(X \in \Delta_i) = - \sum_{i=1}^n p(x_i^*) \Delta \log p(x_i^*) \Delta =$$

$$= - \sum_{i=1}^n p(x_i^*) \Delta \log p(x_i^*) - \sum_{i=1}^n p(x_i^*) \Delta \log \Delta =$$

$$\xrightarrow{\Delta \rightarrow 0} -E \log p(X)$$

$$= - \sum_{i=1}^n p(x_i^*) \Delta \log \Delta = - \log \Delta \sum_{i=1}^n p(x_i^*) \Delta = - \log \Delta \sum_{i=1}^n P(X \in \Delta_i) =$$

$$= - \log \Delta$$

$$H(X) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} [H(X_\Delta) + \log \Delta] = \text{мера непрерыв. абсолютно непрерыв. распределения}$$

опр. $H(X) = -E \log p(X)$ (где X — абс. непрерыв. случайная величина, $p(X)$ — плотность X) — энтропия дифференциальной энтропии абс. непрерыв. случайной величины X .

Блок-функция

$F(x, p(x))$ — функционал

$$\varphi_1(x, p(x)), \dots, \varphi_n(x, p(x))$$

при условии $\int_a^b \varphi_i(x, p(x)) dx = a_i$ $\int_a^b F(x, p(x)) dx \rightarrow \max$ по $p(x)$ $a_i \in \mathbb{R}$ (*)

$$\frac{\partial F}{\partial p} + \lambda_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} + \dots + \lambda_n \frac{\partial \varphi_n}{\partial p} = 0$$

λ_i — множители Лагранжа к условиям (*)

Теор. 1. $X \sim R[a, a]$ — имеет равномерное распределение на $[a, a]$
тогда $M(X) \geq M(Y)$: Y — в.в. величина
 $P(|Y| < a) = 1$

т.е. равномерное распр. на конечном отрезке имеет max M по сравнению с другими распр. на этом же отрезке

2. $X \sim P(\lambda)$ — показательное распр.
тогда $M(X) \geq M(Y)$: Y — в.в. величина
 $(P(Y > 0) = 1, EY = 1/\lambda)$

3. $X \sim N(a, \sigma^2)$ — нормальное распр.
тогда $M(X) \geq M(Y)$: Y — в.в. величина,
 $EY = a, DY = \sigma^2$

Док-во:

$$1. F(x, p) = -p \log p; \quad \varphi_1(x, p) = p; \quad \int_{-a}^a \varphi_1(x, p) dx = 1 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial p} = -\log p - 1 \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial p} = 1$$

$$-\log p - 1 + \lambda_1 \cdot 1 = 0$$

$$p = e^{\lambda_1 - 1} \text{ — подставим в (1)}$$

$$\int_{-a}^a e^{\lambda_1 - 1} dx = 1 = a e^{\lambda_1 - 1} + a e^{\lambda_1 - 1} = 2a e^{\lambda_1 - 1}$$

$$\lambda_1 = \log \frac{1}{2a} + 1$$

$$p = \text{const} \Rightarrow R[-a, a]$$

$$2. F(x, p) = -p \log p; \quad \varphi_1(x, p) = p; \quad \varphi_2(x, p) = x p$$

$$(2) \int_0^\infty \varphi_1(x, p) dx = 1 \quad \int_0^\infty \varphi_2(x, p) dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$-\log p - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x = 0$$

$$p = e^{\lambda_1 + \lambda_2 x - 1}$$

$$\text{подставим в (2)} \Rightarrow p(\lambda)$$

$$3. F(x, p) = -p \log p; \quad \varphi_1(x, p) = p; \quad \varphi_2(x, p) = x^2 p$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x, p) dx = 1 \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_2(x, p) dx = \sigma^2 \quad (3)$$

$$-\log p - 1 + \lambda_1 + \lambda_2 x^2 = 0$$

$$p = e^{\lambda_1 + \lambda_2 x^2 - 1}$$

подставим в (3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_1 + \lambda_2 x^2 - 1} dx = e^{\lambda_1 - 1} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda_2 x^2} dx = 1$$

и т.д.

получаем $N(0, \sigma^2)$

Пуассоновский случайный процесс.

Опр. $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, семейство случайных величин $X(t, \omega)$, $t \in T$, определенных на $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, $T \subset \mathbb{R}$
 $X(t, \omega_0)$ — фиксированная траектория случайного процесса

называется случайным процессом.

если $T \subset \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \Rightarrow X(t)$ — процесс с дискретным временем

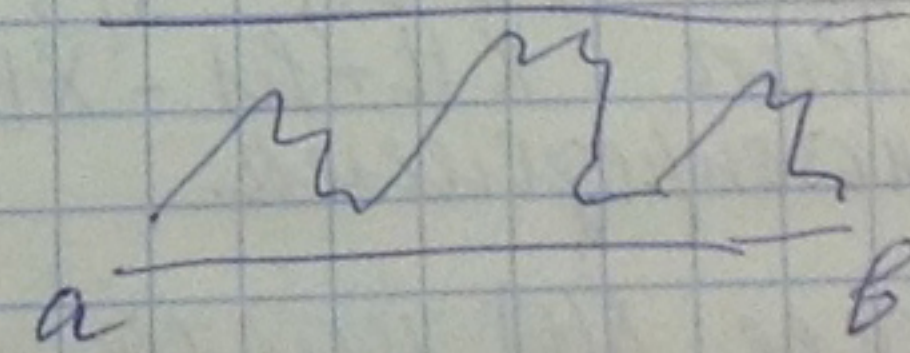
если T — отрезок или полуинтервал, то $X(t)$ — процесс с непрерывным временем.

если $T \subset \mathbb{R}^n$ — то случайное поле

$X(t, \omega) = X(t)$
для краткости

Практическая задача:

$X(t)$



вероятность того, что процесс не выйдет за пределы отрезка

$$\sup_{t \in [a, b]} X(t) < A$$

$$\inf_{t \in [a, b]} X(t) > B$$

Но можно заменить непрерывный процесс на счетном линейном времени

$X(t, \omega)$ $t \in F$ — тогда обобщенный т.в. не

справедливы

$$\sup_{f \in F} X(t) < A$$

$$\inf_{f \in F} X(t) > B$$

используют аппарат внешней меры

Опр. S - пр-во всех возможных траекторий

Σ - борелевское σ -алгебра на S (σ -алгебра порождена всеми старыми м-вами на S)

$$X(w): (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (S, \Sigma)$$

$$\{w: X(w) \in B\} \in \mathcal{A}, \forall B \in \Sigma$$

X ко-се

случ. элемент

Опр. ко-се X на-се мере P на (S, Σ) такая, что $P_K(B) = P(w: X(w) \in B) \forall B \in \Sigma$.

фикс. $t_1, t_2, \dots, t_n \in T$

ко-се вектора $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ на-се конечномерном распределении $X(t)$

Опр. Случайный процесс $X(t)$ ко-се процессом с независимыми приращениями, если $\forall t_0 < t_1 < \dots < t_n, t_i \in T$ и случайные величины $X(t_0), X(t_1) - X(t_0), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1})$ независимы.

Опр. Случайный процесс $X(t)$ ко-се однородным, если $\forall t, t+h (h>0), s, s+h \in T$ случайные величины $X(t+h) - X(t)$ и $X(s+h) - X(s)$ одинаково распределены.

Опр. Случайный процесс $X(t)$ ко-се пуассоновским, если

1) $X(t)$ - процесс с независимыми приращениями

2) $X(t)$ - однородный процесс

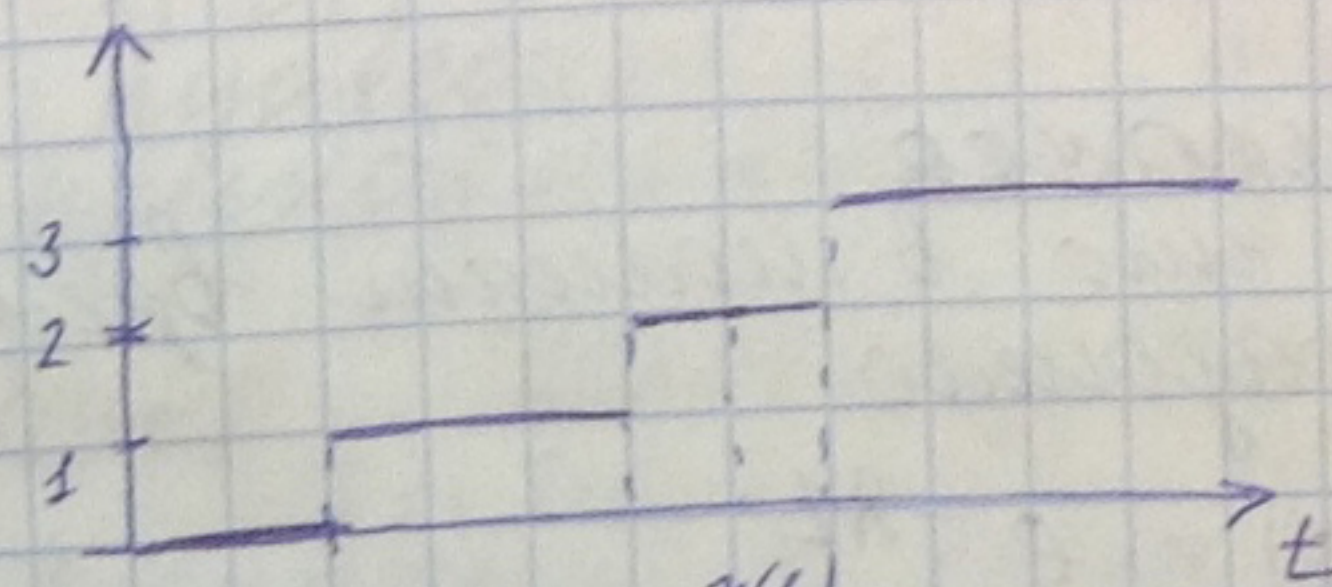
3) $X(0) = 0$ почти наверное

4) при $h \rightarrow 0+$ $\exists \lambda > 0$

$$P(X(h) = 1) = \lambda h + o(h) \quad P(X(h) = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$$

Это не строгое определение, это среднее свойство

траектория случайного процесса (типичная)



- ступенчатая, всегда непрерывна, не убывает

$\varphi_t(s) = E S^{X(t)}$ - преобразующая ф-ция (показываем, что можно её записать, т.е. применимы все теор. значения)

$$\varphi_{t+h}(s) = E S^{X(t+h)} = E S^{X(t+h) - X(t) + X(t)} =$$

$$= E S^{X(t+h) - X(t)} \cdot S^{X(t)} = E S^{X(t+h) - X(t)} \cdot E S^{X(t)} =$$

т.к. однородный $E S^{X(h)} \cdot E S^{X(t)}$ т.к. ко-се приращений

$$\varphi_{t+h}(s) = E S^{X(h)} \cdot E S^{X(t)} = E S^{X(h)} \cdot \varphi_t(s)$$

$$E S^{X(h)} = 1 - \lambda h + o(h) + s \cdot (\lambda h + o(h)) + o(h) =$$

$$= 1 + \lambda h(s-1) + o(h)$$

$$\varphi_{t+h}(s) = (1 + \lambda h(s-1) + o(h)) \varphi_t(s)$$

$$\frac{\varphi_{t+h}(s) - \varphi_t(s)}{h} = \lambda(s-1) \varphi_t(s) + o(1) \varphi_t(s)$$

$$h \rightarrow 0+ (h \neq 0)$$

$$\frac{\partial \varphi_t(s)}{\partial t} = \lambda(s-1) \varphi_t(s)$$

$\varphi_0(s) = 1$ т.к. $X(0) = 0$ почти всюду

$$\Rightarrow \varphi_t(s) = e^{\lambda t(s-1)} \sim \Pi(\lambda t) - \text{пуассоновское распределение}$$

$E X(t) = \lambda t$ - т.е. среднее кол-во скачков за время t .

Опр. λ - среднее кол-во скачков за единицу времени интенсивность $X(t)$

7 лекция

Информационные свойства пуасс. процесса

T_1 - момент 1^{го} скачка
 $\{T_1 > t\} = \{X(t) = 0\}$ - что в момент времени t скачка не произошло

$$P(T_1 > t) = P(X(t) = 0) = e^{-\lambda t}$$

$$P(T_1 < t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t}, & \text{при } t > 0 \\ 0, & \text{при } t \leq 0 \end{cases}$$

1) Время ожидания между скачками пуассоновского процесса имеет экспоненциальное распр. с параметром λ .

T - время ожидания чего-то (или время жизни какого-либо процесса)

$$P(T > t) = U(t)$$

$P(T > t + s | T > s) = U(t/s)$
 s - уже произошло, вероятность того, что произойдет больше, чем s

$$P(T > t + s | T > s) = \frac{P(T > t + s, T > s)}{P(T > s)}$$

$$= \frac{P(T > t + s)}{P(T > s)} = \frac{U(t + s)}{U(s)}$$

$$U(t/s) \cdot U(s) = U(t + s)$$

$X(t)$ - при фикс. $t \sim \Pi(\lambda t)$

λ - интенсивность $X(t)$
 отсутствие изменений: $U(t/s) = U(t)$

$$U(t) \cdot U(s) = U(t + s)$$

интенсивность $U(t) = e^{-\lambda t} \Leftrightarrow U(t)$ соответствует виду эксп. распр.

и отсутствие изменений не нарушает информационных свойств

2) $[a, b]$ - отрезок на временной оси
 $t_1, t_2, \dots, t_n$ - времена скачков (моменты) пуассоновского процесса, которые принадлежат отрезку $[a, b]$.

2) теор. Условное совместное распр. $X(b) - X(a) = n$ при условии $t_1, t_2, \dots, t_n$ совпадает с непрерывным вариационным миром построенного по выборке из равномерного распр. на $[a, b]$ ($R[a, b]$) $X_1, \dots, X_n \rightarrow X_{(1)}, \dots, X_{(n)}$ - упорядоч. выборка по возрастанию

$a \quad x_1 \quad x_1+h \quad x_2 \quad x_2+h \quad \dots \quad x_n \quad x_n+h \quad b$

h - берем точки, чтобы эти отрезки не пересекались

$$P(X_i \in [x_i, x_i+h] \quad i=1, n) \approx h^n f(x_1, \dots, x_n) + O(h^{n+1})$$

↑
плотность
вариационного

эти вероятности будут $\sim$ на h !

$$n! \cdot (F(x_1+h) - F(x_1)) \cdot (F(x_2+h) - F(x_2)) \cdot \dots \cdot (F(x_n+h) - F(x_n))$$

$$= f(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} n! f(x_1) \dots f(x_n), & \text{при } h \rightarrow 0 \text{ произвольно} \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

↑
плотность

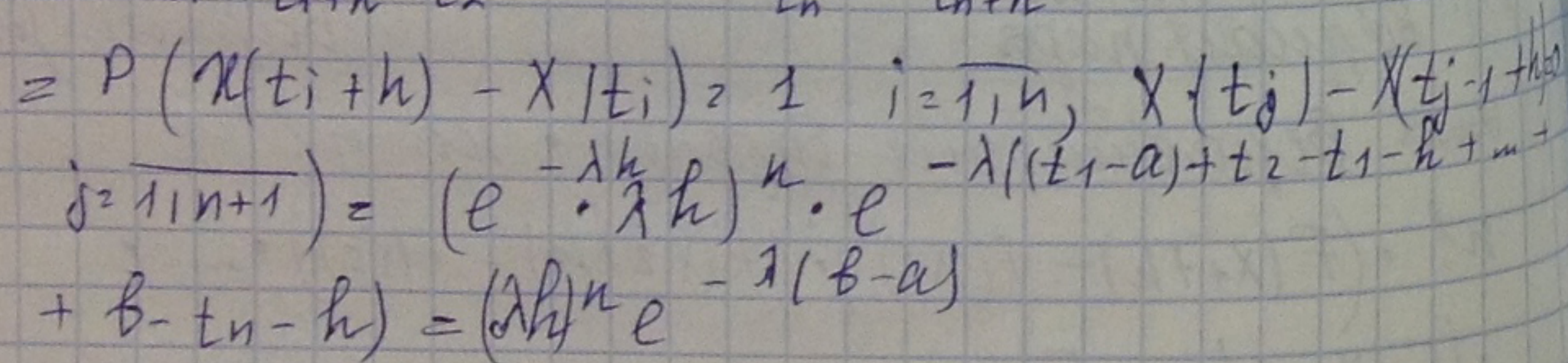
Вернемся к теореме.

Ран-вои $(\eta_1, \dots, \eta_n)$ - J чное есть такой вектор - абсолютно корр. распр.

приним $h \leq \min [x_i - x_{i-1}]$ - чтобы
соседние отрезки не перекрывались

$$= \frac{P(\tau_i \in [t_i, t_i+h] \mid \tau_i \leq \bar{t}, X(B) - X(a) = n)}{P(X(B) - X(a) = n)} \quad (11)$$

$P(t_i \in [t_i, t_i+h] \mid z \in I, n, X(\beta) - X(\alpha) \geq n) =$
 означает, что в интервале $[t_i, t_i+h]$ пошло
 и скачков, а в остальные ни чего



$\Rightarrow$ утверждение в справедливости
утверждение

$$p(\tau_i \in [t_i, t_i + h] \mid \tau_i \geq t_i) = 1 - \exp(-\lambda h) \approx \lambda h$$

$$p_{\tau_1, \dots, \tau_n}(\tau_1, \dots, \tau_n) = \lambda^n e^{-\lambda \tau_n}$$

$$\sum_{i=2}^n T_i - T_{i-1} \quad 1 \quad LD \geq 0.$$

$$T_1 = \xi_1, \quad T_2 = \xi_1 + \xi_2, \quad \dots, \quad T_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$$

$$P_{\xi_1, \dots, \xi_n}(s_1, \dots, s_n) = \lambda^n e^{-\lambda(s_1 + \dots + s_n)} = \lambda^n e^{-\lambda s_1} \dots e^{-\lambda s_n} = 1 \text{ (если } s_1 = \dots = s_n = 0 \text{)}$$

теор. $\int X(t)$ - нулев. процесс
- мар. сближение

$$\Delta(\lambda t) \leq \sqrt{\frac{C}{\lambda t}}$$

the 1st 11/11

7. е. распр. Пуассона безгранично
(бесконечно) дленим

$$X(t) \stackrel{\text{def}}{=} X_{n,1} + \dots + X_{n,n}$$

$$X_{n,i} \sim \Pi\left(\frac{\lambda t}{n}\right)$$

$$\sup_x \left| P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_{n,i} - \lambda t}{\sqrt{\lambda t}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C E|X_{n,i} - \frac{\lambda t}{n}|^3}{\sqrt{\lambda t} (\sqrt{\lambda t})^3}$$

$$E X_{n,i} = D X_{n,i} = \frac{\lambda t}{n}$$

кер. в. б. - 3.

$$E |X_{n,i} - E X_{n,i}|^3 = E \left| X_{n,i} - \frac{\lambda t}{n} \right|^3 =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n,i} = k) \left| k - \frac{\lambda t}{n} \right|^3 =$$

$$\left\{ \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n,i} = k) \left(k - \frac{\lambda t}{n} \right)^3 + 2 P(X_{n,i} = 0) \left(\frac{\lambda t}{n} \right)^3 \right\}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{n,i} = k) \left(k - \frac{\lambda t}{n} \right)^3 + 2 P(X_{n,i} = 0) \left(\frac{\lambda t}{n} \right)^3$$

$$\leq \frac{\lambda t}{n} + 2 P(X_{n,i} = 0) \left(\frac{\lambda t}{n} \right)^3 \leq \frac{\lambda t}{n} \left(1 + 2 \left(\frac{\lambda t}{n} \right)^2 \right)$$

$$\Rightarrow \Delta(\lambda t) \leq \frac{C}{\sqrt{\lambda t}}$$

возможно
здесь
лишнее i

Задание

Случайные суммы

Опр. N - целочисленная ксир. след. величина.

$X_1, \dots, X_n, \dots$ - н.о. р.с. в.

$N, X_1, X_2, \dots$ - к/з и опр. на $(\mathcal{X}, \mathcal{A}, P)$

$$S_N = \sum_{i=1}^N X_i = X_1(\omega) + \dots + X_{N(\omega)}(\omega) \quad \left(\sum_{i=1}^0 = 0 \right)$$

$$p_n = P(N=n)$$

$F(x)$ - ф.р. X_i

$P(x)$ - ксир. ф. X_i

$f(t)$ - кер. ф. X_i

Мер. 1. $F_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n F^{*n}(x)$ ($F^{*n}(x)$ - n -кратная свертка F)

$F^{*0}(x)$ - ф.р. единичного скачка в нуле

2. если $p_0 > 0 \Rightarrow F_N(x)$ - не абсолютно ксир., иначе если X_i - абс. ксир.

если $p_0 = 0$ и X_i - абс. ксир. $\Rightarrow p_N(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot p^{*n}(x)$

($p^{*n}(x)$ - n -кратная свертка $p(x)$)

3. $f_N(t) = \psi(f(t))$, где ψ - произвольная ф.р.

4. $E S_N = E X_i E N$, $D S_N = D X_i E N + D N (E X_i)^2$

Рок-во:

$$1) F_N(x) = P(S_N < x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n < x) \cdot P(N=n) =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + \dots + X_n < x) \cdot P(N=n) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{*n}(x) \cdot p_n$$

$$P(S_N < x | N=n) = \frac{P(S_n < x, N=n)}{P(N=n)} =$$

$$= \frac{P(S_n < x, N=n)}{P(N=n)} = \frac{P(S_n < x) \cdot P(N=n)}{P(N=n)} = P(S_n < x)$$

важно! используются к/з $N, X_1, X_2, \dots$

2) если $p_0 > 0 \Rightarrow$ не абс. ксир.
если $p_0 = 0$ $F_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n F^{*n}(x)$

мер $\rightarrow$ равномерно $\Rightarrow$ можно почленно (т.к. $F^{*n}(x)$ монотонно от 1)

$$p_N(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n \cdot p^{*n}(x)$$

$$3) f_N(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF_N(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot F^{*n}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot f^{*n}(t)$$

мер $\rightarrow$ равномерно $\Rightarrow$ можно почленно
иначе ксир. и почленно мер. $\sum p_n = 1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF^{(n)}(x) = E e^{it(x_1 + \dots + x_n)} = (f(t))^n$$

$$\Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} p_n f^n(t) = \psi(f(t))$$

$$\psi(s) = ES^N = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n$$

$$4) ES_N = \frac{1}{i} \frac{\partial \psi(f(t))}{\partial t} \Big|_{t=0} = \frac{1}{i} \frac{\partial \psi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \Big|_{t=0} = EN \cdot EX_i$$

$$(ES_N)^2 = - \frac{\partial^2 \psi(f(t))}{(\partial t)^2} \Big|_{t=0} = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial f} \cdot \frac{\partial f}{\partial t} \right) \Big|_{t=0}$$

$$= - \frac{\partial^2 \psi}{(\partial f)^2} \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 \Big|_{t=0} - \frac{\partial \psi}{\partial f} \cdot \frac{\partial^2 f}{(\partial t)^2} \Big|_{t=0} =$$

$$= -E[N(N-1)] \cdot [-(EX_i)^2] - EN(-EX_i^2) =$$

$$= EN^2(EX_i)^2 - EN(EX_i)^2 + ENEX_i^2 =$$

$$= EN^2(EX_i)^2 + ENDX_i$$

$$DS_N = ES_N^2 - (ES_N)^2 = EN \cdot DX_i + DN \cdot (EX_i)^2$$

$N \sim \Pi(\lambda) \Rightarrow S_N$ - независимая сумма
 S_N имеет обобщенное независимое представление

$$(f_{S_N}(t)) = f_N(t) = \psi_N(f(t)) = e^{\lambda(f(t)-1)}$$

$$\psi_N(s) = e^{\lambda(s-1)}$$

Лемма 1. Независимая сумма имеет обобщенное представление

$$f_N(t) = (g_n(t))^n, \quad g_n(t) = e^{\frac{1}{n}(f(t)-1)}$$

$$\text{т.е. кар. } \varphi \quad X_1 + \dots + X_{N_n} \quad N_n \sim \Pi\left(\frac{1}{n}\right)$$

Лемма 2. $N \sim \Pi(\lambda)$

$$ES_N = \lambda EX_i \quad DS_N = \lambda DX_i + \lambda (EX_i)^2 = \lambda EX_i^2$$

теор. $N \sim \Pi(\lambda)$. S_N - независимая сумма,
 $EX_i = a, \quad DX_i = \sigma^2$

$$P\left(\frac{S_N - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2 + \sigma^2)}} < x\right) \rightarrow \Phi(x)$$

$$\sup_x \left| P\left(\frac{S_N - \lambda a}{\sqrt{\lambda(a^2 + \sigma^2)}} < x\right) - \Phi(x) \right| \leq \frac{C_0 E|X_i|^3}{\sqrt{\lambda}(a^2 + \sigma^2)^{3/2}}$$

C_0 - const из леммы Бернштейна-Левенсона

$M \sim \text{Geom}(p)$

$$p(M=n) = p(1-p)^n \quad n=0,1,\dots$$

$$EM = \frac{1-p}{p}, \quad DM = \frac{1-p}{p^2}$$

$$\psi_M(s) = \frac{p}{1-(1-p)s} \quad \text{Сумма независимых}$$

$$f_{S_M}(t) = \frac{p}{1-(1-p)f(t)}$$

теор. (Левенсон)

X_i - независимые случайные величины

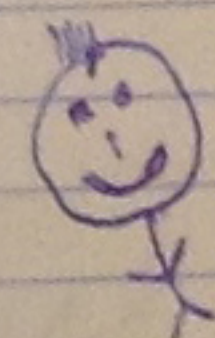
$$EX_i = a < \infty \quad G(x) = \begin{cases} 1 - e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

$M \sim \text{Geom}(p)$, S_M - независимая сумма

$$P\left(\frac{S_M}{a} < x\right) \rightarrow G(x) \text{ при } p \rightarrow 0$$

$$EX_i^2 = b^2$$

$$\sup_x \left| P\left(\frac{S_M}{a} < x\right) - G(x) \right| \leq \frac{pb^2}{(1-p)a^2}$$



Взаимосвязь нулев. и тем. с. сумм

Лемма 1. $\mathcal{M}$ -умноженная обобщенная сум. величина $\Rightarrow S_n$ явл. нулев. с. суммой.

$$\varphi(s) = e^{\lambda(s-1)} \quad \varphi_M(s) = \varphi(\varphi(s)) = e^{\lambda(\varphi(s)-1)}$$

где $\varphi(s)$ - некот. преобразующая функция

$$f_{S_M}(s) = \varphi_M(f(t)) = e^{\lambda(\varphi(f(t))-1)}$$

где $g(t)$ - кар. ф. соответ. $y_i \stackrel{d}{=} X_{1+m} + X_L, L \sim \nu$

~~Лемма 1'~~

$$f_{S_M}(t) = \varphi(g(t))$$

$$S_n \stackrel{d}{=} Y_{1+m} + Y_N \text{ где } N - \text{нулев. с. вел.}$$

Лемма 2. $\mathcal{M} \sim \text{Geom}(p) \Rightarrow \mathcal{M}$ -обобщ. нулев. сум. величина

$$\lambda = \log \frac{1}{p} \quad \varphi(s) = \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{1-(1-p)s}$$

$$e^{\lambda(\varphi(s)-1)} = e^{\lambda(\frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{1-(1-p)s} - 1)} =$$

$$= e^{\log \frac{1}{1-(1-p)s} - \lambda} = \frac{1}{1-(1-p)s} e^{-\lambda} = \frac{p}{1-(1-p)s}$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{\lambda} \log \frac{1}{1-(1-p)s} \quad \log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$$

$$\varphi(s) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((1-p)s)^k}{k}$$

$$\lambda = \log \frac{1}{p}$$

$$\frac{(1-p)^k}{k} \log \frac{1}{p} \quad k=1, \dots, m$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \log \frac{1}{p} (1-p)^k = 1 \Rightarrow$$

$\varphi(s)$ - преобразующая функция $\Rightarrow$

$\mathcal{M}$ -обобщ. нулев. сум. вел.
(логарифмическое распр)

теор. $\mathcal{M}$ -тем. с. ~~величина~~ сумма $(\mathcal{M} \sim \text{Geom}(p))$

тогда $S_n \stackrel{d}{=} S_N$ - нулев. сум. суммой
причем

$$Y_i \stackrel{d}{=} X_{1+m} + X_L, \text{ где } L - \text{логарифмическое распр.}$$

$N \sim \Pi(\log \frac{1}{p})$

$\Rightarrow$ в тем. с. сумма безгранично делима
обратное верно не всегда

зуб. $\mathcal{M} \sim \text{Geom}(p)$ - нулев. с. сумма $S_N = X_{1+m} + X_N$ УЛЕКСИЯ
 $N \sim \Pi(\lambda)$, $X_i \sim \text{кар. ф. } f(t)$, $X_1, X_2, \dots$ н.о.р.с.в.

если $g(t) = \frac{1-e^{-\lambda f(t)}}{1-e^{-\lambda}}$ явл. кар. ф. $\Rightarrow$

$$S_N \stackrel{d}{=} S_M \quad S_M = Y_{1+m} + Y_M \quad M \sim \text{Geom}(e^{-\lambda})$$

Y_i - н.о.р.с.в. с кар. ф. $g(t)$

$$M, Y_1, \dots \sim \text{кар. ф.}$$

Рок-во. $\varphi(t)$ - кар. ф. S_N ; $\varphi(t) = e^{\lambda(f(t)-1)}$

$$\varphi_M(s) = \frac{p}{1-(1-p)s} \quad ; \text{ гок-то } \varphi(t) = \varphi_M(g(t))$$

$$\varphi_M(g(t)) = \frac{e^{-\lambda}}{1-(1-e^{-\lambda})(\frac{1-e^{-\lambda f(t)}}{1-e^{-\lambda}})} = \frac{e^{-\lambda}}{e^{-\lambda f(t)}} = e^{\lambda(f(t)-1)}$$

теор. (переноса)

$\{X_{n,j}\}$ схема серий; $X_{n,1}, \dots, X_{n,k}$ - н.о.р.с.в.
 N_n - номеровательность ~~теор.~~ с. вел.
 $N_n, \dots, X_{n,1}, \dots$ - незав. $\forall n \in \mathbb{N}$

] $\{m_n\}$ - н.с.р. возр. последовательности
натуральных чисел

$$P\left(\frac{N_n}{m_n} < x\right) \rightarrow A(x), \quad P(S_{n, m_n} < x) \rightarrow H(x)$$

тогда $P(S_{n, m_n} < x) \rightarrow F(x)$, где $F(x)$ соответсв.
кар. функции $f(t) = \int_0^\infty h(t) dA(u)$, $h(t)$ - кар. функ.
соответствующая разбиению $H(x)$.

] $N \sim A(x)$ если $\frac{N_n}{m_n} \xrightarrow{P} 1 \Rightarrow f(t) = h(t)$, т.е.
предел с.с.р. имеет совпадение с предельн.
н.с.р. с.с.р.

Рок-во: $g_n(t) = E e^{it \sum_{k=1}^{m_n} X_{n,k}}$
 $h_n(t) = E e^{it \sum_{k=1}^{m_n} X_{n,k}} = g_n(t)$

$$A_n(x) = P\left(\frac{N_n}{m_n} < x\right)$$

$$f_n(t) = E e^{it \sum_{k=1}^{N_n} X_{n,k}} = \sum_{k=0}^{\infty} P(N_n = k) E e^{it \sum_{j=1}^k X_{n,j}} =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(N_n = k) g_n^k(t) = E g_n^{N_n}(t) = \int_0^\infty g_n^u(t) dP(N_n \leq u)$$

$$= \{u = u' \cdot m_n\} = \int_0^\infty g_n^{u'}(t) dP(N_n \leq u' \cdot m_n) =$$

$$= \int_0^\infty h_n^{u'}(t) dA_n(x)$$

из этого
можно
надо убедиться
что
потом так себе
и можно
замечать
как и

если $f_n(t) \rightarrow f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ т.е. сходимость
по непрерывности эквивалентна сходимости
кар. ф. $\Rightarrow$ теорема будет доказана.

$$|f_n(t) - f(t)| = \left| \int_0^\infty h_n^u(t) dA_n(u) - \int_0^\infty h^u(t) dA(u) \right|$$

$$\leq \left| \int_0^\infty h_n^u(t) dA_n(u) - \int_0^\infty h^u(t) dA_n(u) \right| +$$

$$+ \left| \int_0^\infty h^u(t) dA_n(u) - \int_0^\infty h^u(t) dA(u) \right| = I_1(n) + I_2(n)$$

Рассмотрим $I_2(n) = \left| \int_0^\infty h^u(t) dA_n(u) - \int_0^\infty h^u(t) dA(u) \right|$

$A_n(u) \rightarrow A(u)$ ($\frac{N_n}{m_n} \Rightarrow N$)
где $\Rightarrow$ н.с.р. и с.р. функции $\varphi_2(u)$

$$E \varphi_2\left(\frac{N_n}{m_n}\right) \rightarrow E \varphi_2(N) \quad \varphi_2(u) = z^u$$

при $|z| \leq 1$ с.р. и н.с.р.

$$z \rightarrow h(t) \quad |h(t)| \leq 1$$

по с.р. с.с.р. с.с.р. $I_2(n) \rightarrow 0$
при $n \rightarrow \infty$

Рассмотрим $I_1(n) = \left| \int_0^\infty h_n^u(t) dA_n(u) - \int_0^\infty h^u(t) dA_n(u) \right|$

$$\leq \left| \int_0^M h_n^u(t) dA_n(u) - \int_0^M h^u(t) dA_n(u) \right| +$$

$$+ \left| \int_M^\infty h_n^u(t) dA_n(u) - \int_M^\infty h^u(t) dA_n(u) \right| = I_{11}(n) + I_{12}(n)$$

Рассмотрим $I_{12}(n) = \left| \int_M^\infty h_n^u(t) dA_n(u) - \int_M^\infty h^u(t) dA_n(u) \right|$

$$= \left| \int_M^\infty (h_n^u(t) - h^u(t)) dA_n(u) \right| =$$

$$= \left| \int_M^\infty (h_n^u(t) - h^u(t)) dA(u) \right|$$

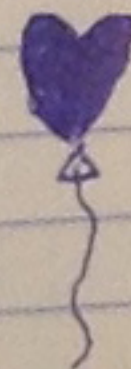
Опр. семейство с.с.р. величин $\{\xi_n\}$ (и соотв.
семейство н.с.р. $\{F_n\}$) наз-ся
слабо компактным, если из
 $\forall$ подс. $\in \{\xi_n\}$ ($\in \{F_n\}$) можно выделить
подпослед., кот. слабо сходится к $\xi \in \{\xi_n\}$
($F \in \{F_n\}$).

$\{A_n\}$ - слабо компактно

Критерий слабой компактности
(теорема Прохорова)

Семейство $\{\xi_n\}$ слабо компактно $\Leftrightarrow$

$$\limsup_{M \rightarrow \infty} P(|\xi_n| \geq M) = 0 \quad \leftarrow \text{семейство ограничено}$$



$$P(|\xi_n| > M) = F_n(-M) + 1 - F_n(M)$$

возвращающиеся к док-ву теоремы переноса

$$I_{12}(n) = \left| \int_M^\infty (h_n^u(t) - h^u(t)) dA_n(u) \right| \leq \int_M^\infty |h_n^u(t)| dA_n(u) + \int_M^\infty |h^u(t)| dA_n(u) \leq \int_M^\infty dA_n(u) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$I_{11} = \left| \int_0^M (h_n^u(t) - h^u(t)) dA_n(u) \right|$$

Лемма. Если $\psi(z)$ голоморфна в обл. U и $a, b \in U$:

$$|\psi(b) - \psi(a)| \leq |b-a| \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} |\psi'(a + (1-\alpha)b)|$$

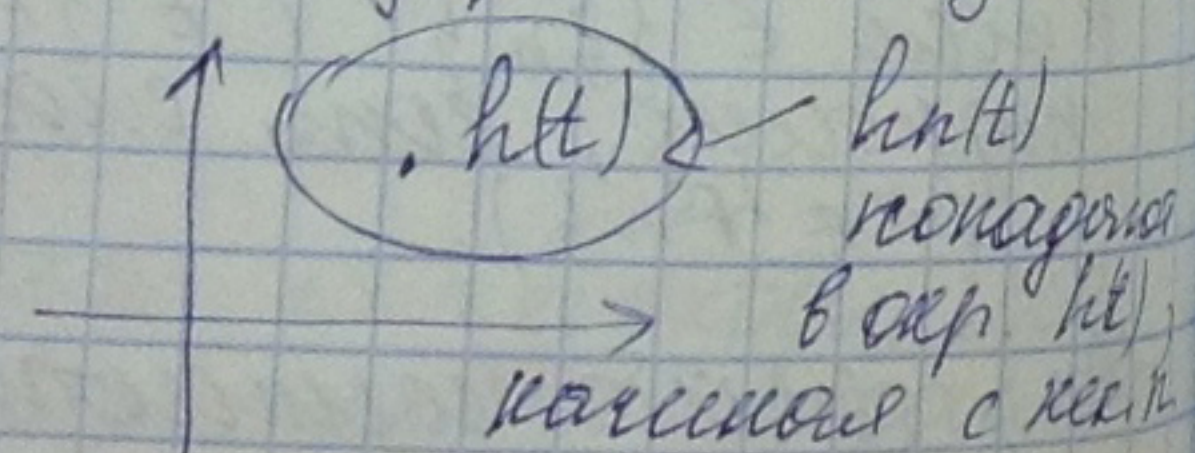
$$\psi(z) = z^u \quad \psi'(z) = u z^{u-1} \quad u \geq 0$$

и доказательству теоремы возвращающиеся

$$|h_n^u(t) - h^u(t)| \leq u \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} |d h_n(t) + (1-\alpha) h(t)|$$

$$\leq u \sup_{0 \leq \alpha \leq 1} |d h_n(t) + (1-\alpha) h(t)| \cdot |h_n(t) - h(t)| \leq$$

по теореме Кесслера $h(t)$ — непрерывно гл. ф. $\Rightarrow h(t) \neq 0 \quad \forall t$ $\Rightarrow h_n(t) \rightarrow h(t) \Rightarrow$



$$\leq u \min(h_n(t), h(t)) |h_n(t) - h(t)| \leq \frac{u}{\delta} |h_n(t) - h(t)|$$

$|h(t)| > \delta$ и $|h_n(t)| > \delta$ — определено δ не зависит от n

$$\Rightarrow I_{11} \leq \frac{u}{\delta} \int_0^M dA_n(u) \leq \frac{M}{\delta} |h_n(t) - h(t)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (\text{при } n \geq n_0)$$

$\Rightarrow$ теор.

теор. Если X, U, V — сущ. величины таковы, что X — кар. ф-ция, U — кар. ф-ция, V — кар. ф-ция, $\{m_n\}$ — последовательность н.ч. (возвращающиеся), $\{a_n\}, \{b_n\}$ — послед. вещ. чисел

$$\frac{N_n}{m_n} \Rightarrow U, \quad S_n, m_n - a_{m_n} \Rightarrow X,$$

$$\text{тогда } S_n, N_n \Rightarrow Z, \text{ где } Z \text{ — сущ. величина кар. ф-ция } f(t) = E h^u(t) e^{itv}, h(t) \text{ — кар. ф-ция } X.$$

если V — сущ. $\Rightarrow$ с точностью до множителя теорема переноса $\Rightarrow f(t) = E e^{itv} \cdot h(t) = g(t) \cdot h(t)$ $g(t)$ — кар. ф-ция V . $\Rightarrow$ существование сущ. распределений.

$\{X_{p,j}\}_{j=1,2,\dots} -$ семейство сущ. величин $(0 < p < 1)$

$\forall p \quad X_{p,1}, X_{p,2}, \dots$ — н.с.в.; $X_{p,j} \sim \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1-p \end{cases}$ N_p — семейство целочисл. сущ. величин (показатели)

$$N_p, X_{p,1}, X_{p,2}, \dots - \text{н.з.} \quad S_p = \sum_{j=1}^{N_p} X_{p,j}$$

Π N_p — общее количество договоров $X_{p,j}$ — индикатор события, от которого зависит значение S_p — кол-во ватт по этому тарифу.

Аналог теоремы Ито-Нассона для

10 ЛЕКЦИЯ

сущ. сумм сущ. индикаторов.

Мор. $\exists p \mid Np \Rightarrow N$ при $p \rightarrow 0$
 тогда $S_p \Rightarrow S$ при $p \rightarrow 0$

$P(S=k) = \frac{1}{k!} \int_0^\infty e^{-u} u^k dA(u)$ - сущ. индикатор
 где $A(z)$ - функция распредел. N .

предположим
 что все
 от 0 до ∞

$H_\lambda(x)$ - ф.р. пуассоновского закона с параметром λ

$F_S(x) = E H_\lambda(x) = \int H_\lambda(x) \cdot dA(\lambda) = \int H(\lambda, x) dA(\lambda)$

- это сущ.
 H - смешиваемое распр.
 A - смешивающее распр.

Рок-во: $\forall \{p_n\} \quad p_n \rightarrow 0$ (последовательность)
 $m_n = \lfloor \frac{1}{p_n} \rfloor$ - целая часть от $\frac{1}{p_n}$
 $\Rightarrow m_n \cdot p_n \rightarrow 1$

$S_{n,m_n} = \sum_{j=1}^{m_n} X_{p_n,j} \rightarrow S' \sim \Pi(1)$

(по теореме Пуассона)
 к.ф. S' : $h(t) = e^{e^t - 1} = \exp(e^t - 1)$
 тогда по теореме переноса

$S_n, Np_n \Rightarrow S \sim \text{кар. } f(t)$
 $f(t) = \int_0^\infty h^u(t) dA(u) = \int_0^\infty e^{u(e^t - 1)} dA(u)$

Если в теор. переноса $H(k) = \Phi(k)$
 тогда $F(x) = \int_0^\infty \Phi(\frac{x}{\sqrt{u}}) dA(u)$ - масштабная сущ.
 где $u = \sqrt{k}$, где k - сущ. величина с ф.р. $A(u)$
 $X \sim N(0,1)$ и Y - сущ. величина с ф.р. $A(u)$

$F(x) = P(X \cdot Y < x) = P(X < \frac{x}{Y}) =$
 $= EP(X < \frac{x}{Y} | Y)$

$f(t) = \int_{-\infty}^\infty e^{itx} dF(x) = \int_{-\infty}^\infty e^{itx} d \int_0^\infty \Phi(\frac{x}{\sqrt{u}}) dA(u) =$
 $= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{ity\sqrt{u}} d\Phi(y) dA(u) = \int_0^\infty e^{ity\sqrt{u}} d \int_0^\infty \Phi(y) dA(u) =$
 $= \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty e^{ity\sqrt{u}} d\Phi(y) dA(u) =$

к.р. корни закона $B(\cdot) \pm i\sqrt{\cdot}$

$= \int_0^\infty \Phi(t\sqrt{u}) dA(u) = \int_0^\infty e^{-\frac{t^2 u}{2}} dA(u) =$
 $= \int_0^\infty \varphi^u(t) dA(u) \Rightarrow$ ф.р. вогнутой
 кривой, как масштабная сущ. корней закона

В классе масштаб. сущ. корни закона содержатся:

- норм. распр. ($\sim e^{-\frac{x^2}{2}}$ $x \rightarrow +\infty$)
- распр. Лапласа ($\sim e^{-|x|}$ $x \rightarrow +\infty$)
- распр. Стюдента ($\sim 1/x^b$ $b > 0$ $x \rightarrow +\infty$)
- распр. Коши ($\sim 1/x$ $x \rightarrow +\infty$)

Дипр. $\forall y \in \mathbb{R}^m$ $(ky) \in \mathbb{R} \times Y$, Σ - σ -алгебра на Y .
 $\exists F(k, y)$: при $\forall$ фикс. $y \in Y$
 $F(k, y)$ - ф.р.
 при $\forall$ фикс. $k \in \mathbb{R}$ $F(k, y)$ - функция на (Y, Σ)
 $\exists G$ - вероятностная мера на (Y, Σ)
 $H(k) = \int_Y F(k, y) dG(y)$ - сущ. $F(k, y)$ - смешиваемая
 $G(y)$ - смешивающее

2-мерная случайная величина на $(\mathcal{Y}, \Sigma, G)$

$$H(x) = EF(x|z)$$

если y и F есть плотность f :

$$h(x) = Ef(x|z) = \int_{\mathcal{Y}} f(x, y) dG(y)$$

$(u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ $F(\frac{x-v}{u})$ - ф.р. $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$
 норм-масштабная смесь

$$H(x) = \iint F(\frac{x-v}{u}) dG(u, v) = EF(\frac{x-v}{u})$$

$$z \sim H(x), z \stackrel{\text{def}}{=} Xu + v, \text{ где } x \sim F(x)$$

$$(u, v) \sim G(u, v)$$

$$h(x) = \iint \frac{1}{u} f(\frac{x-v}{u}) dG(u, v) = E \frac{1}{u} f(\frac{x-v}{u})$$

если (u, v) - дискретные, то

$$H(x) = \sum_{j=1}^K p_j F(\frac{x-a_j}{\sigma_j})$$

$$H(x) = \sum_{j=1}^K p_j F_j(x)$$

$$\sum_{j=1}^K p_j = 1, p_j \geq 0$$

F_j - плотн. припуска b_j -й субпопуляции

$$H(x) = \sum_{j=1}^K p_j F_j(x)$$

анализируя позволяет рассматривать неоднородную популяцию как однородную

оп. $\exists F(x, y)$ удовл. условиям опр. смеси

$\mathcal{Q}$ - семейство случайных величин

$$\mathcal{H}\mathcal{Q} = \{H_Q(x) : Q \in \mathcal{Q}\}$$

семейство $\mathcal{H}\mathcal{Q}$ наз-ся идентифицируемым, если из равенства $EF(x|Q_1) = EF(x|Q_2) \forall x \in \mathbb{R}$ при условии, что $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q} \Rightarrow Q_1 \stackrel{d}{=} Q_2$.

$$\pi \frac{1}{3} \cdot 3 I(x \in [0, \frac{1}{3})) + \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot I(x \in [\frac{2}{3}, 1]) = \frac{1}{2} \cdot 2 I(x \in [0, \frac{1}{2}]) + \frac{1}{2} \cdot 2 I(x \in [\frac{1}{2}, 1])$$

$F(\frac{x-v}{u})$ - ф.р. $\forall u > 0, v \in \mathbb{R}$

$X_1, X_2 \sim F(x)$, $X_i, (u_i, v_i)$ - к/з $i=1, 2$ и опр. на одном вероятностном пространстве
 масштабная смесь $EF(\frac{x-v}{u})$ идентифицируема
 если $X_1 u_1 + v_1 = X_2 u_2 + v_2 \Rightarrow (u_1, v_1) \stackrel{d}{=} (u_2, v_2)$

дискретный случай:

$$H(x) = \sum_{j=1}^K p_j F(\frac{x-a_j}{\sigma_j})$$

наз-ся идентифицируемой, если из равенства

$$\sum_{j=1}^K p_j F(\frac{x-a_j}{\sigma_j}) = \sum_{i=1}^m q_i F(\frac{x-b_i}{\tau_i}) \Rightarrow$$

$$K=m \text{ и для } \forall j \in \{1, \dots, K\} \exists i \in \{1, \dots, m\} : p_j = q_i, a_j = b_i, \sigma_j = \tau_i$$

$F(x, y)$ при $\forall x \in \mathbb{R}$ непрерывна по y
 при $\forall y \in \mathcal{Y}$ $F(x, y)$ - ф.р.
 $\sum$ - алгебра на $\mathcal{Y}$

МАТЕМАТИКА

Условия идентификации целостности системы

Доп. $\uparrow$ $F(x, y)$, $y \geq 0$ называется аддитивно
монотонной, если $F(x, y_1) * F(x, y_2) = F(x, y_1 + y_2)$
 $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$.

$\pi \in \Phi(\frac{\pi}{\sqrt{\sigma}})$, $\sigma > 0$ - аддитивно замкнено.

Упр. 1 $J \{ F(x, y), y > 0 \}$ - адекватно заданное,
 $Q = \{ Q: P(Q > 0) = 1 \}$, $H_Q = \{ EF(x, Q), Q \in Q \}$
 идентифицирующее семейство.

Упр. 2 $F(x, y) = F(xy)$, $F(0) = 0$, $y > 0$ и
 $G(y) = F(e^y)$ преобразование Фурье-
 тье $\int_0^\infty e^{ity} dy G(y)$ не обращается в 0,
 тогда $\mathcal{H}g = \{EF(x \cdot Q), Q \in g\}$ и
 $g = \{Q : P(Q > 0) = 1\}$
 то $\mathcal{H}g$ - идентифицирующее семейство

Зам. 3. Если $F(x)$ соотв. кар. функции $f(t)$,
которая не обращается в 0,
то множество всевозможных св. величин
на (Y, Σ) тогда $H_Q = \{FF(x-Q), Q \in Q\}$
идентифицируемое множество

$$X \sim F(X), \quad Q \in \mathcal{Q}, \quad X, Q - \text{u.f.z.}$$

$$X+Q \sim EF(X+Q), \quad X, Q - \text{u.f.z.}$$

$$f_{X+Q}(t) = f_X(t) \cdot f_Q(t)$$

$$f_{X+Q_1}(t) = f_{X+Q_2}(t) \Rightarrow f_X(t) \cdot f_{Q_1}(t) = f_X(t) \cdot f_{Q_2}(t)$$

$$\text{u. } f_{Q_1}(t) = f_{Q_2}(t)$$

Утв. 4 Конечная сорви-массовое распределение
корреляционных законов идентифицировано
(ЕФ($\frac{x-V}{\sigma}$), (μ, V)) - дисперсион параметр

числа с конечными числом значений)

ТР Общие сови-массовые еще не
норм. законов не еще сдерживаются.

$$X_1, X_2 \sim N(0, 1) \quad , \quad \text{H}_2: P(Z_2 > 0) = 1$$

и $\mathcal{U}_1 \in \mathcal{D}(\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2) = 1$; $x_1, x_2, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2 - \text{иссегодер.}$
 $x_1 \mathcal{U}_2 + x_2$

$$(*) P(Z < x) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} P\left(\frac{X_1 - V}{u}\right) dP(Z_2 < u) dP(X_2 < v)$$
$$(**) P(Z < X) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi\left(\frac{x-v}{u}\right) dP(X, U, v < v) dP(U, u < u)$$

$\text{game}(\Psi) \quad (U_1, V) \stackrel{\text{def}}{=} (U_2, X_2) \quad (U_2, X_2) \stackrel{\text{def}}{=} (U_1, U_2 X_1)$
 $\text{game}(\Psi\Psi) \quad (U_1, V) \stackrel{\text{def}}{=} (U_1, V_1 X_1) \quad (U_2, X_2) \neq (U_1, U_2 X_1)$

Продвигая Кекса.

Пуассоновский процесс $X(t)$ $t \in T = [0; +\infty)$

1) $X(t)$ - процесс с незав. приращением
 $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ $X(t_0), X(t_1), \dots, X(t_n) - X(t_{n-1}) - \dots$

2) $X(t)$ - однородный процесс
 $\forall t, s, t+h, s+h \in T$
 $X(t+h) - X(t)$ и $X(s+h) - X(s)$ - одинаково
 разпред.

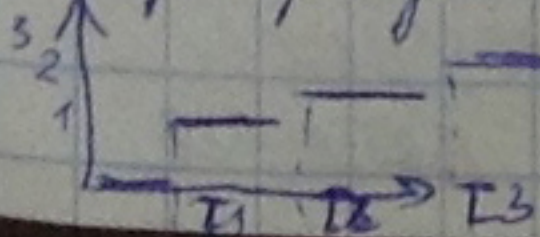
3) $x(0) = 0$ и b .

4) $\lambda > 0$ $h \downarrow 0$ $P(X(h) = 0) = 1 - \lambda h + \bar{O}(h)$
 $P(X(h) = 1) = \lambda h + \bar{O}(h)$
 $P(X(h) \geq 2) = \bar{O}(h)$

$$P(X(t) = k) = \frac{e^{-\lambda t} (\lambda t)^k}{k!}$$

- Временное отключение пессоры скачки пессор. поощрительная и неравномерная

• Усп. распр. и скачков по Филлер.
Временн [a, b] совпадает с распр.
Вер. крив. по виду распр. $R[a, b]$ - равномерное
распр.



$N_1(t)$ - стандарт. пуасс. процесс

$$EN_1(t) = \lambda t = \mathbb{D}N_1(t)$$

$N_1(\lambda t) \stackrel{d}{=} N_1(t)$ - стохастическое эквивалентность

$$P(N_1(\lambda t) = k) = P(N_2(t) = k) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$k=0, 1, \dots$

$\lambda(t)$ - несл. интенсивность Φ -проц. $\lambda(t) \cdot \int_0^t \lambda(s) ds$

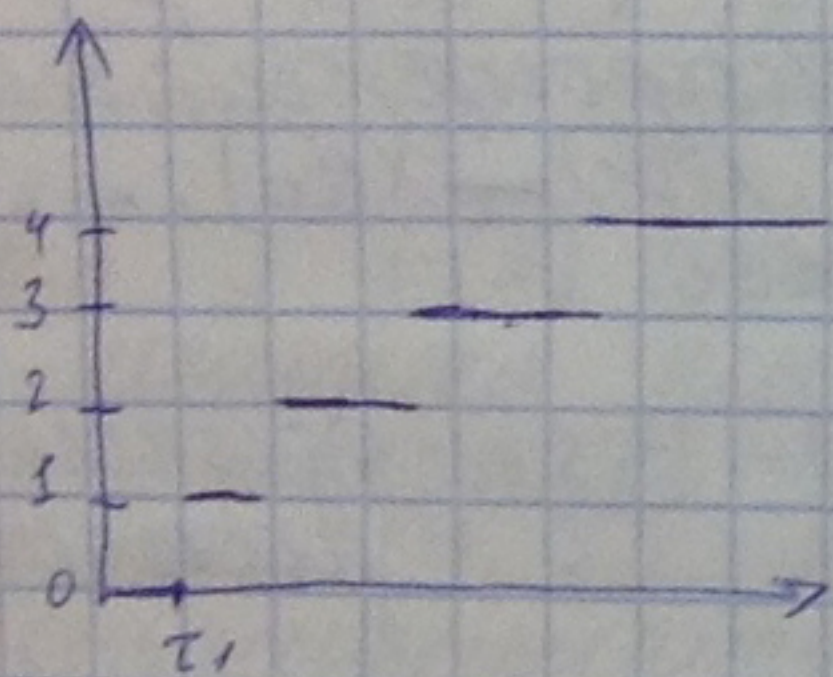
$N^*(t) = N_1(\lambda(t))$ - неоднор. пуасс. процесс

$$P(N^*(0) = 0) = 1 \quad P(N^*(t) = k) = e^{-\lambda(t)} \frac{(\lambda(t))^k}{k!}$$

$$\lim_{h \downarrow 0} \frac{EN^*(t+h) - EN^*(t)}{h} = \lim_{h \downarrow 0} \frac{\lambda(t+h) - \lambda(t)}{h} = \lambda(t)$$

интенсивность $h \rightarrow 0$

$N^*(t)$
 $\lambda(t)$ - несл. интенсивность $N^*(t)$



$\lambda(t)$ - случайный процесс:

1) $\lambda(0) = 0$ и в.

2) $P(\lambda(t) < \infty) = 1 \quad \forall t \geq 0$

3) траектории $\lambda(t)$ непрерывны и несл. непрерывны

$N_1(t)$ - стандартный пуасс. процесс
 $N_1(t)$ и $\lambda(t)$ - н/з

Опр. $N(t) = N_1(\lambda(t))$ - суперпозиция N_1 и λ - несл. двупараметрический пуассоновский процесс Коха

$\lambda(t)$ - управляющий процесс

неоднородность несл. зависит не только от t но и от $\lambda(t)$ (т.е. как сформировано $\lambda(t)$)

$$EN(t) = EN_1(\lambda(t)) = E(EN_1(\lambda(t)) | \lambda(t)) = E\lambda(t)$$

но опр. для доказательства свойства в процессе $\lambda(t)$
 $E\xi = E E(\xi | \eta) \quad \int_A \xi dP = \int_A E(\xi | \eta) dP \quad A \in \mathcal{F}$

$$\mathbb{D}N(t) = EN^2(t) - (EN(t))^2$$

$$EN^2(t) = EN(N(t) + N(t)N(t)) = EE(N^2(t) | \lambda(t)) = E(E N_1^2(\lambda(t)) | \lambda(t)) = E(\lambda(t) + \lambda^2(t))$$

$$\mathbb{D}N(t) = E\lambda(t) + \mathbb{D}\lambda(t)$$

Обобщенный процесс Коха

$X_1, X_2, \dots, X_m$ - н.о.р.с.в. $N(t)$ - процесс Коха
 $N(t), X_1, \dots, X_m$ - н/з при $\forall t \geq 0$

$$S(t) = \sum_{j=1}^{N(t)} X_j - \text{обобщенный процесс Коха} \quad \left(\frac{d}{dt} = 0 \text{ по опр.} \right)$$

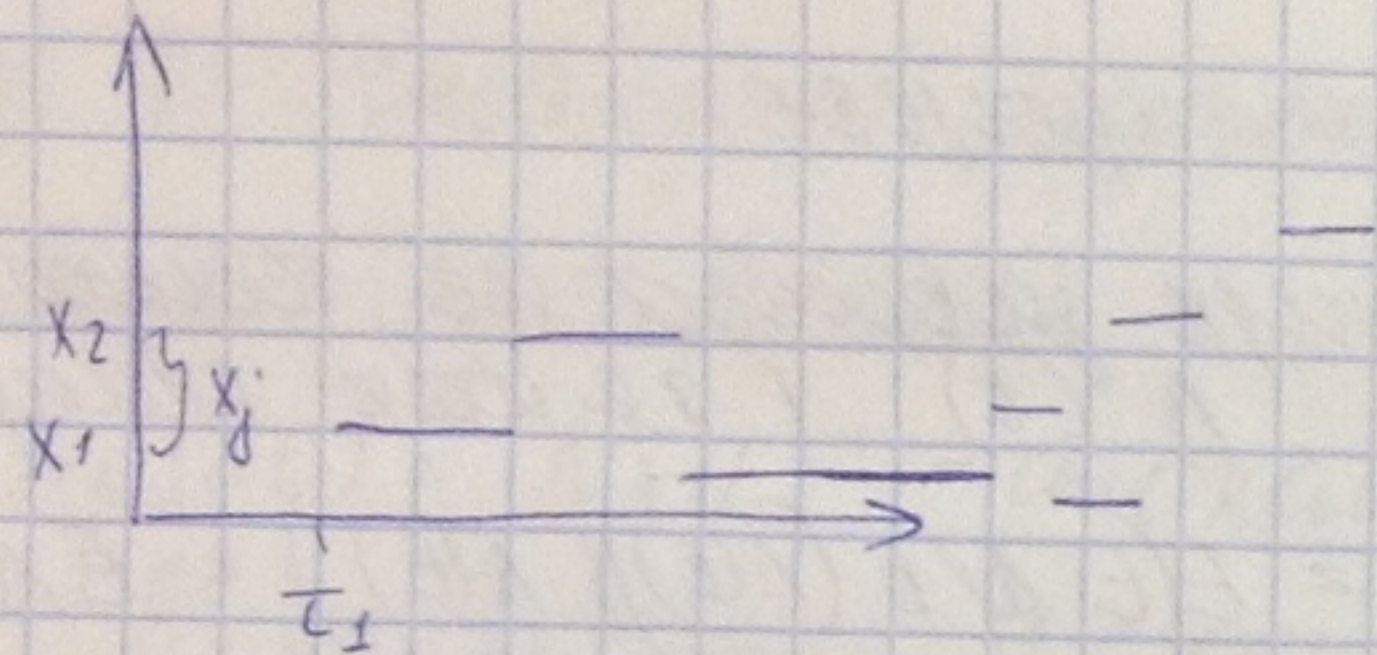
если $y = N(\lambda(t))$ $\lambda(t) = \lambda t \Rightarrow S(t)$ - обобщ. пуасс. процесс

П? Брауновское движение массы

$N(t)$ - число соударений частицы с границей частицы сред. до момента t .

X_j - смещение частицы в результате j -го соударения.

$S(t)$ - координата частицы в момент времени t



12 ЛЕКЦИЯ

Обобщенные процессы Коха

$X_1, X_2, \dots$ - н.о.р.с.в.

$N(t)$ - стандартный пуассоновский процесс

$$\int E^2 N(t) < \infty \Rightarrow E S(t) = \alpha E N(t)$$

$$D S(t) = E N(t)(\alpha^2 + \sigma^2) + \alpha^2 D N(t)$$

$d(t) > 0$ - неспр. возрастающая функция

теор. (ц.п.т. для обобщ. процесса Коха)

$$\int E X_i = 0 \quad N(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} \infty \quad \sigma^2 = D X_i > 0$$

$\Rightarrow$ - сходится по распределению $\frac{S(t)}{\sqrt{d(t)}} \Rightarrow Z \Leftrightarrow$

$$1. P(Z < x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dP(y)$$

$$2. \frac{N(t)}{d(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \mathcal{N}$$

Следствие 1.

$$P\left(\frac{S(t)}{\sqrt{d(t)}} < x\right) \rightarrow \Phi(x) \Leftrightarrow \frac{N(t)}{d(t)} \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} 1$$

следует из ц.п.т. для обобщ. пр. Коха и идентифицир. масштабных систем

пар. функции

$$g_{\alpha, \theta}(t) = \exp(-|t|^\alpha) \left(-\frac{i\pi\alpha\theta}{2} \operatorname{sign} t\right)$$

$$0 \leq \alpha \leq 2 \quad |\theta| < \theta_\alpha = \min\left(1, \frac{2}{\alpha} - 1\right)$$

строго устойчива

теор. (критерий сходимости одномерн. распр. обобщ. пр. Коха к строго устойчив. законам)

$$\int E X_i = 0, \quad d(t) > 0 \text{ - неспр. возр. ф-ция}$$

$$N(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{P} \infty \quad P\left(\frac{S(t)}{\sqrt{d(t)}} < x\right) \rightarrow G_{\alpha, \theta}(x)$$

$$\sigma^2 = D X_i > 0$$

($G_{\alpha, \theta}(x)$ - строго устойчив. ф. р. с параметрами α, θ)

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{N(t)}{d(t)} < x\right) \rightarrow G_{\frac{\alpha}{2}, 1}(x)$$

доказ-во:

$$G_{\alpha, \theta}(x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) dG_{\alpha/2, 1}(y)$$

далее из ц.п.т. для обобщ. пр. Коха и идентифицир. масштабных систем

Поведение обобщ. процесса Коха в основном определяется поведением управляющего процесса, а не поведением слагаемых X_i .

$$N(n) = \sum_{i=1}^n Z_i \quad Z_i \text{ - н.о.р.с.в.}$$

$$S(n) = \sum_{j=1}^{N(n)} X_j \quad Z_i \text{ - управляющий процесс } N$$

теор. Распр. $\frac{S(n)}{d_n}$ сходится к $G_{\alpha, \theta}(x)$ при $d_n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда $d_n \rightarrow \infty$



$$\lim_{X \rightarrow \infty} \frac{P(Z_i > X)}{P(Z_i > kX)} = k^{d/2} \quad \forall k > 0$$

теор. (354 для обобщ. пр. Коха)

$$\int EX_i = a \neq 0 \quad \Lambda(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{P}{t}$$

$$\frac{S(t)}{t} \Rightarrow Z \Leftrightarrow \frac{\Lambda(t)}{t} \Rightarrow \mathcal{N} \text{ при этом } Z \stackrel{d}{=} a$$

Свойства ^{масштабных} ~~сильных~~ ^{нормальных} ~~законов~~

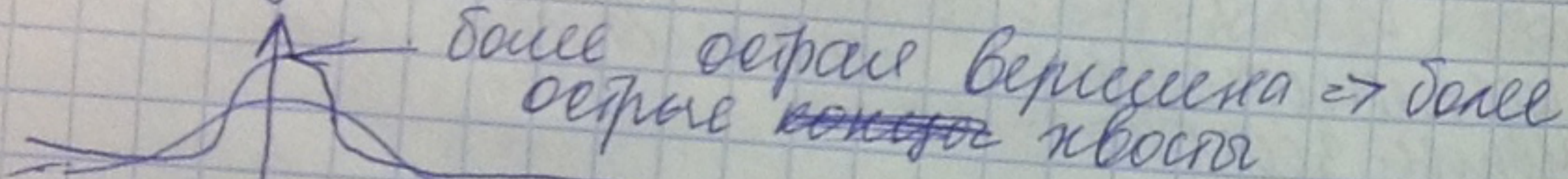
$$F(x) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{x}{y}\right) dP(y < y) - \text{масштабная смесь}$$

$$f(x) = \int_0^\infty \frac{1}{y} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) dP(y < y) \quad \text{дискретная смесь}$$

$$F(x) = \sum_{k=1}^n p_k \Phi\left(\frac{x}{y_k}\right)$$

$$f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{p_k}{y_k} \varphi\left(\frac{x}{y_k}\right)$$

• оцениваемость масштабных смесей



$$Z - \text{сл. вел.}, EZ^4 < \infty$$

$$\kappa(Z) = E\left(\frac{Z - EZ}{\sqrt{DZ}}\right)^4 - \text{коэффициент эксцесса}$$

(показывает отклонения)

у норм. распр. $\kappa(Z) = 3$ — характеризует норм. закон среди всех безграничных распредел.

$$Z - \text{смесь сл. вел.} \quad Z \stackrel{d}{=} X \cdot Y$$

$$X \sim N(0,1), \quad P(Y > 0) = 1 \quad X, Y - \text{н.з.}$$

Лемма 1 $\int EX^4 < \infty, EY^4 < \infty, X, Y - \text{н.з.}$
 $EX > 0, P(Y > 0) = 1 \Rightarrow E(X \cdot Y) \geq E(X)$
 или $E(X \cdot Y) = E(X) \Leftrightarrow P(Y = \text{const}) = 1$
 Док-во: $E(X \cdot Y) = E\left(\frac{XY - EXY}{\sqrt{DXY}}\right)^4 = E\left(\frac{XY - EXY}{\sqrt{E(XY)^2 - (EXY)^2}}\right)^4$

$$= E\left(\frac{XY - EXY}{\sqrt{EX^2 EY^2 - (EXEY)^2}}\right)^4 = \frac{EX^4 EY^4}{(EX^2)^2 (EY^2)^2} =$$

$$= E(X) \frac{EY^4}{(EY^2)^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{в силу нер-ва Йенсена} \\ EY^4 \geq (EY^2)^2 \\ \text{или т.к. } DY^2 \geq 0 \end{array} \right\} \geq E(X)$$

$$\frac{EY^4}{(EY^2)^2} = 1 \Leftrightarrow P(Y = \text{const}) = 1$$

$$Z = X \cdot \sqrt{U} - \text{масштабная смесь}$$

$$X \sim N(0,1) \quad P(\sqrt{U} > 0) = 1 \quad X \text{ и } \sqrt{U} - \text{н.з.}$$

$$F_Z(x) = E\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{U}}\right) \quad P(Z > x) = 1 - E\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{U}}\right)$$

$$p_Z(x) - \text{плотность } Z \quad p_Z(x) = \int_0^\infty \frac{1}{y} \varphi\left(\frac{x}{y}\right) dP(U < y)$$

Лемма 2 $P(Z > x) \geq 1 - \Phi(\sqrt{2\pi} x p_Z(0))$

$$\int EU^{-1/2} = 1 \Rightarrow P(Z > x) \geq 1 - \Phi(x)$$

Док-во: $p_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{y} e^{-x^2/(2y^2)} dP(U < y) \Big|_{x=0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{y} dP(U < y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} EU^{-1/2}$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{y} dP(U < y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} EU^{-1/2}$$

$$\Rightarrow \text{чтобы было верно } \Phi(x) \quad EU^{-1/2} = 1$$

Устойчивость систем нормальных законов.

X_1, X_2, Y_1, Y_2 ; X_i и Y_i - н/з $P(Y_i \geq 0) = 1$

$Z = X \sqrt{n}$; X и n - н/з $X \sim N(0, 1)$ $P(Z > 0) = 1/2$

$\frac{X_1}{Y_1}$ $\frac{X_2}{Y_2}$ $X_i \sim F_i(x) \leftarrow \text{т.е. } X_i \text{ и } Y_i \text{ независимы}$
 $Y_i \sim G_i(y)$ Φ -и непересекающиеся $F_i(x)$ и $G_i(y)$

$$\rho(x, y) = \sup |F_X(x) - F_Y(x)|$$

$\rho\left(\frac{X_1}{Y_1}, \frac{X_2}{Y_2}\right)$ в терминах $\rho(X_1, X_2)$ и $\rho(Y_1, Y_2)$

$$\Delta = \sup_x |P\left(\frac{X_1}{Y_1} < x\right) - P\left(\frac{X_2}{Y_2} < x\right)|$$

$$\Delta(x) = |P\left(\frac{X_1}{Y_1} < x\right) - P\left(\frac{X_2}{Y_2} < x\right)|$$

$$P\left(\frac{X}{Y} < x\right) = P(X < 0, Y = 0) + P(X < xY, Y > 0) =$$

$$= P(X < 0) \cdot P(Y = 0) + \int_{0+}^{\infty} F_X(xy) dF_Y(y)$$

$$F_X(0) \cdot [F_Y(0+) - F_Y(0)]$$

$$\Delta(x) = |P(X_1 < 0) \cdot P(Y_1 = 0) + \int_{0+}^{\infty} F_1(xy) dG_1(y) -$$

$$- P(X_2 < 0) \cdot P(Y_2 = 0) - \int_{0+}^{\infty} F_2(xy) dG_2(y)| \leq$$

$$\leq |P(X_1 < 0) \cdot P(Y_1 = 0) - P(X_2 < 0) \cdot P(Y_2 = 0)| +$$

$$+ |\int_{0+}^{\infty} F_1(xy) dG_1(y) - \int_{0+}^{\infty} F_2(xy) dG_2(y)| =$$

$$= Q_1 + Q_2$$

$$Q_1 = |P(X_1 < 0) \cdot P(Y_1 = 0) - P(X_2 < 0) \cdot P(Y_2 = 0)|$$

$$Q_2 = |\int_{0+}^{\infty} F_1(xy) dG_1(y) - \int_{0+}^{\infty} F_2(xy) dG_2(y)| \leq$$

$$\leq |\int_{0+}^{\infty} [F_1(xy) - F_2(xy)] dG_1(y)| + |\int_{0+}^{\infty} F_2(xy) d(G_1(y) - G_2(y))| = Q_{21} + Q_{22}$$

$$Q_{21} \leq P(X_1, X_2) \int_{0+}^{\infty} dG_1(y) = P(X_1, X_2) \cdot P(Y_1 > 0)$$

$$Q_{22} = 0 \text{ если } x = 0$$

$$Q_{22} = P(X_2 < 0) |\int_{0+}^{\infty} dG_1(y) - dG_2(y)| =$$

$$= P(X_2 < 0) |P(Y_1 > 0) - P(Y_2 > 0)| =$$

$$= P(X_2 < 0) |P(Y_1 = 0) - P(Y_2 = 0)|$$

$$= 0 \text{ если } x \neq 0$$

$$Q_{22} = |F_2(xy) [G_1(y) - G_2(y)]|_{0+}^{\infty} -$$

$$- \int_{0+}^{\infty} [G_1(y) - G_2(y)] dy F_2(xy) \leq$$

(x=0)
это все равно
равно нулю
если x=0

$$\leq |P(X_2 \leq 0) \cdot [P(Y_1 = 0) - P(Y_2 = 0)]|_{0+} +$$

$$+ |\int_{0+}^{\infty} [G_1(y) - G_2(y)] dy F_2(xy)| = Q_{221} + Q_{222}$$

$$Q_{222} \leq P(Y_1, Y_2) \int_{0+}^{\infty} dy F_2(xy) \leq P(Y_1, Y_2) I_2(x)$$

$$I_2(x) = \int_{0+}^{\infty} dy F_2(xy) = \begin{cases} P(X_2 > 0), & x > 0 \\ P(X_2 < 0), & x < 0, \text{ и } 0+ \end{cases}$$

$$Q_{221} = |P(X_2 \leq 0) \cdot [P(Y_1 = 0) - P(Y_2 = 0)]|$$

Умб: $\exists X_i$ и Y_i - н/з $i=1, 2$; $P(Y_i \geq 0) = 1$

$$\Delta(x) = |P\left(\frac{X_1}{Y_1} < x\right) - P\left(\frac{X_2}{Y_2} < x\right)| \leq |P(X_1 < 0) \cdot P(Y_1 = 0) -$$

$$- P(X_2 < 0) \cdot P(Y_2 = 0)| + P(X_1, X_2) \cdot P(Y_1 > 0) +$$

$$+ P(X_2 \leq 0) \cdot |P(Y_1 = 0) - P(Y_2 = 0)| + \\ + p(Y_1, Y_2) I_2(x)$$

След. 1: $\int P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = 0$

$\Delta(\pi) \leq p(X_1, X_2) + p(Y_1, Y_2) I_2(x)$
 но мы можем положить в рассуждении
 вместо X_1, X_2, Y_1, Y_2 , тогда получаем
 $I_1(x) \Rightarrow$ правильная формулировка

$\Delta(\pi) \leq p(X_1, X_2) + p(Y_1, Y_2) \cdot \min_{i=1,2} \max_j P(X_i > 0) / P(X_i < 0)$

След. 2: $\int P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = 0$

$\Delta \leq p(X_1, X_2) + p(Y_1, Y_2)$

След. 3: $\int P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = 0$ и кроме того
 где одного i $P(X_i > 0) = P(X_i < 0)$,
 тогда $\Delta \leq p(X_1, X_2) + \frac{1}{2} p(Y_1, Y_2)$

$\frac{1}{2}$, т.к. $P(X_i < 0) = P(X_i > 0) \leq \frac{1}{2}$ (X_i не 0).

$\int P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = 0$

$p(Y_1^{-1}, Y_2^{-1}) = \sup_x |P(\frac{1}{Y_1} < x) - P(\frac{1}{Y_2} < x)| =$
 $= \sup_{x > 0} |P(Y_1 > \frac{1}{x}) - P(Y_2 > \frac{1}{x})| = \sup_{x > 0} |P(Y_1 \leq \frac{1}{x}) - P(Y_2 \leq \frac{1}{x})|$
 $= \sup_{z > 0} |P(Y_1 \leq z) - P(Y_2 \leq z)| = p(Y_1, Y_2)$

След. 4: $\int P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = 0$

также $p(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \leq p(X_1, X_2) + p(Y_1, Y_2) \cdot \min_{i=1,2} (\max_j P(X_i > 0), P(X_i < 0))$

След. 5: $\int P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = 0$

$p(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \leq p(X_1, X_2) + p(Y_1, Y_2)$

След. 6: $\int P(Y_1 = 0) = P(Y_2 = 0) = 0$ и кроме того
 где одного i $P(X_i > 0) = P(X_i < 0)$,
 тогда $p(X_1, Y_1, X_2, Y_2) \leq p(X_1, X_2) + \frac{1}{2} p(Y_1, Y_2)$

$Z_1 \stackrel{d}{=} X_1 \sqrt{U_1}$

$Z_2 \stackrel{d}{=} X_2 \sqrt{U_2}$

$X_1, X_2 \sim N(0, 1)$
 $P(U_i > 0) = 1$

$\sup_x |E \Phi(\frac{x}{\sqrt{U_1}}) - E \Phi(\frac{x}{\sqrt{U_2}})| \leq \frac{1}{2} \sup_{x > 0} |P(\sqrt{U_1} < x) - P(\sqrt{U_2} < x)|$

$f_j(t) = E e^{itZ_j} = E e^{itX_j \sqrt{U_j}} = p(X_1, X_2) = 0$
 $= E(E(e^{itX_j \sqrt{U_j}} | U_j)) = E e^{-t^2 U_j / 2}$
 т.к. X_j и U_j независимы

$\psi_j(s) = E e^{-sU_j}$ — преобразование Лапласа

$|f_1(t) - f_2(t)| = |\psi_1(\frac{t^2}{2}) - \psi_2(\frac{t^2}{2})|$

$P(U_j < x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{n < \sqrt{2t}x} \frac{(-1)^n (2t)^{n/2}}{n!} f_j^{(n)}(\sqrt{2t})$

$|P(U_1 < x) - P(U_2 < x)| \leq \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \sum_{n < \sqrt{2t}x} \frac{(-1)^n (2t)^{n/2}}{n!} [f_1^{(n)}(\sqrt{2t}) - f_2^{(n)}(\sqrt{2t})] \right|$

$\forall \varepsilon > 0$

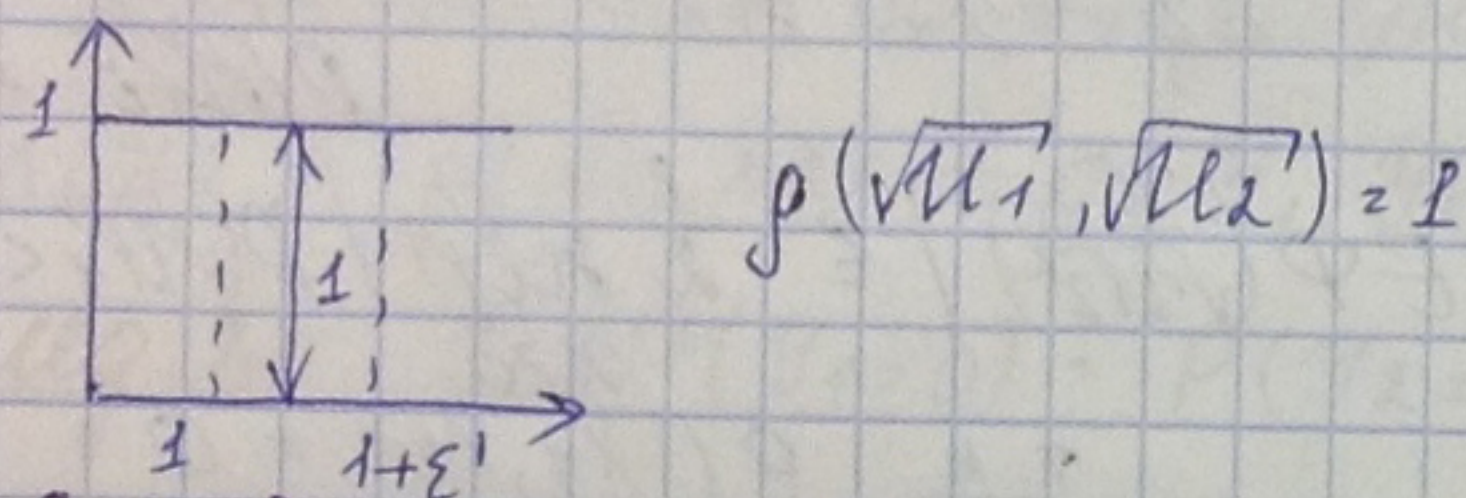
$\int \sqrt{U_1}$ — возмущено в ε ; $\sqrt{U_2}$ — возмущено в $\varepsilon + \varepsilon'$

$\varepsilon' = \varepsilon \sqrt{2\pi e}$

$|\Phi(x) - \Phi(\frac{x}{1+\varepsilon'})| = \left| \frac{\varepsilon' x}{1+\varepsilon'} \varphi(\delta x + (1-\delta) \frac{x}{1+\varepsilon'}) \right| =$

φ - непрерывная = плотность стая
 морей ласпр; $\delta \in (0, 1)$ =

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\delta' x}{1+\delta'} \varphi \left(x \left(\frac{\delta \delta' + 1}{1+\delta'} \right) \right) \right| \leq \sup_{x \geq 0} \left| \frac{\delta' x}{1+\delta'} \varphi \left(\frac{x}{1+\delta'} \right) \right| = \\ & \frac{1+\delta \delta'}{1+\delta'} > \frac{1}{1+\delta'} = \left\{ x' = \frac{x}{1+\delta'} \right\} = \sup_{x \geq 0} \left| \delta' x' \varphi(x') \right| = \varepsilon \\ & \text{т.к. } \sup_{x \geq 0} |x' \varphi(x')| = \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \end{aligned}$$



$G * H$ - сдвиг. распр. g, h - кар. функции

Опр. Расст. Леви между $X, Y (F_X, F_Y)$:

$$L(X, Y) = L(F_X, F_Y) = \inf \{ h > 0 : F_X(x-h) - h \leq F_Y(x) \leq F_X(x+h) + h \text{ для всех } x \in \mathbb{R} \}$$

Расст. Леви - длина стороны наибольшего квадрата со сторонами, параллельными осям, который можно вписать между графиками F_X и F_Y .

